Paul Erdős, un mathématicien discret à la racine du monde

P.-A. Zitt

LAMA, Université Paris-Est Marne-la-Vallée

Journée académique de formation — janvier 2019

Plan

1. Il y a une infinité de nombres premiers
2. « Ils vécurent heureux »
3. La méthode probabiliste
4. Erdős, les graphes et l'aléatoire

Plan

Jeunesse de P. Erdős

- Naissance à Budapest en 1913
- Une enfance protégée dans une période troublée
- Un enfant « prodige » : Erdős découvre à 4 ans les nombres négatifs et sa propre finitude, est fasciné à 10 ans par les nombres premiers...

Il y a a beaucoup de nombres premiers

Théorème (L. Euler)

$$\sum_{p \text{ premier}} \frac{1}{p} = \infty.$$

Une preuve d'Erdős (1938)

On fixe k, on appelle « petits » les k premiers nombres premiers, « grands » les autres. Exemple pour $k = 5$:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots$$

Un n quelconque est dit « petit » si *tous* ses facteurs premiers le sont :

$4 = 2 \cdot 2$	petit
$77 = 7 \cdot 11$	petit
$26 = 2 \cdot 13$	grand

Sur les entiers de 1 à N, certains sont « petits », d'autres « grands » :

$$N = N_p + N_g.$$

Une preuve d'Erdős

Majoration de N_g.

- Un « grand » entier est forcément multiple d'un « grand » premier.
- Pour p premier il y a $\lfloor N/p \rfloor$ multiples de p inférieurs à N.

$$\begin{aligned} N_g &\leq \sum_{p \text{ «grand» premier}} \lfloor N/p \rfloor \\ &\leq N \sum_{p \text{ «grand» premier}} 1/p. \end{aligned}$$

Une preuve d'Erdős

Majoration de N_p.

- Un « petit » entier n n'a que des petits facteurs.
- $n = a(n) \cdot b(n)^2$ où $a(n)$ est sans facteur carré.
- $n \leq N$: il n'y a qu'au plus $\sqrt{N}$ choix pour $b(n)$.
- $a(n)$ contient chaque petit premier 0 ou 1 fois : 2^k choix au plus.

$$N_p \leq 2^k \sqrt{N}.$$

Une preuve d'Erdős

Conclusion. On rassemble les majorations. Pour tout k :

$$N \leq N \left(\sum_{p \text{«grand»}} \frac{1}{p} \right) + 2^k \sqrt{N}$$

$$\Longrightarrow \quad 1 \leq \sum_{p \text{«grand»}} \frac{1}{p} + \frac{2^k}{\sqrt{N}} \qquad \text{(on divise par } N\text{)}$$

$$\Longrightarrow \quad 1 \leq \sum_{p \geq p_k} \frac{1}{p} \qquad (N \to \infty)$$

Le reste de la série $\sum 1/p$ est donc toujours plus grand que 1 :

$$\sum_{p \text{ premier}} \frac{1}{p} = \infty.$$

Plan

Kömal

- À 11 ans Erdős découvre le « journal mathématique des écoles secondaires », *Középiskolai Matematikai Lapok* (*KöMal*)
- Une collection d'articles, d'exercices et de problèmes
- En répondant aux concours de *Kömal* il recontre d'autres futurs mathématiciens hongrois, qu'il retrouvera à l'université
- Au début des années 30, un groupe se forme, qui se retrouve régulièrement au Városliget (parc de Budapest).

La statue d'Anonymus

(Domaine public, via Wikipedia)

Dramatis Personæ

Esther Klein, George Szekeres et Paul Erdős

Archives de *Kömal*, via Quanta Magazine

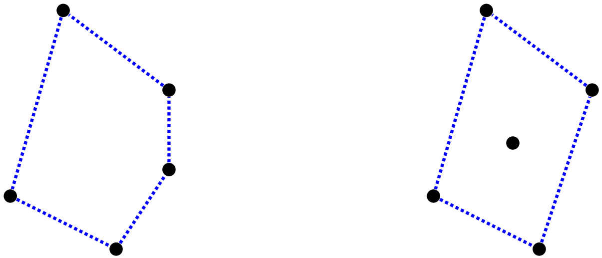
Le problème d'Esther Klein

Théorème

Étant donné 5 *points du plan (en position générale), il y en a toujours* 4 *qui forment un quadrilatère convexe.*

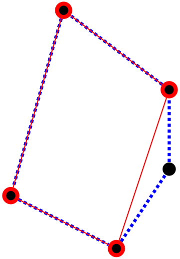
La preuve

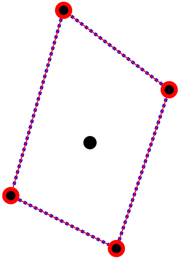
On prend l'enveloppe convexe des cinq points. Si elle a 4 ou 5 sommets :



La preuve

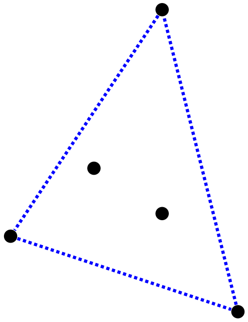
On prend l'enveloppe convexe des cinq points. Si elle a 4 ou 5 sommets :





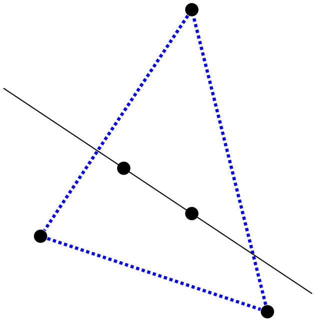
La preuve

Si l'enveloppe convexe a 3 sommets :



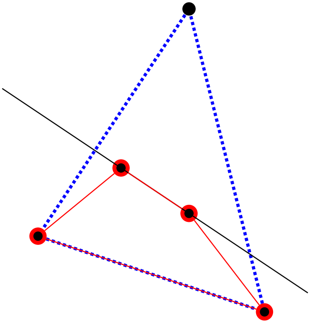
La preuve

Si l'enveloppe convexe a 3 sommets :



La preuve

Si l'enveloppe convexe a 3 sommets :



Le problème généralisé

Définition

$K(m)$: le nombre de points nécessaire pour être certain de pouvoir trouver un m-polygone convexe.

E. Klein : $K(4) = 5$.

Théorème (Erdős, Szekeres)

Pour tout entier m, $K(m)$ est fini : un ensemble de points suffisamment grand contient nécessairement un m-gone convexe.

La théorie de Ramsey

Idée de la preuve :

- un polygone à m points est convexe si et seulement si tous les quadrilatères « extraits » le sont.
- Étant donné n points du plan, comme $K(4) = 5$, chaque sous-ensemble de 5 points contient au moins un bon sous-ensemble de 4 points.
- Il y a donc énormément de bons quadrilatères (*i.e.* convexes).
- Il reste à montrer que nécessairement, que pour n grand, au moins un sous-ensemble de m points ne contient que des bons sous-ensembles de 4 points : résultat combinatoire, prouvé par Ramsey et redécouvert par Erdős et Szekeres.

La théorie de Ramsey

Quelques points remarquables :

- une fois le cas $K(5,4)$ montré, la finitude peut se montrer par un argument *purement combinatoire* : la géométrie n'intervient plus.
- « Un grand ensemble quelconque a forcément une structure » : théorie de Ramsey, initiée et développée par Erdős.
- Des questions toujours ouvertes : on sait que $K(4) = 5$ (Klein), $K(5) = 9$ (Makai), $K(6) = 17$ (Szekeres, Peters 2006 (!)). Conjecture : $K(m) = 2^{m-2} + 1$. Meilleure borne en $2^{m+o(m)}$ obtenue par Suk en 2016 !

Plan

Une année normale pour Erdős

Pendant l'année 1960 P. Erdős est passé par :

- Budapest,

Une année normale pour Erdős

Pendant l'année 1960 P. Erdős est passé par :

- Budapest,
- Moscou, Léningrad, Moscou, Irkoutsk,

Une année normale pour Erdős

Pendant l'année 1960 P. Erdős est passé par :

- Budapest,
- Moscou, Léningrad, Moscou, Irkoutsk,
- Oulan Bator,

Une année normale pour Erdős

Pendant l'année 1960 P. Erdős est passé par :

- Budapest,
- Moscou, Léningrad, Moscou, Irkoutsk,
- Oulan Bator,
- Pékin, Changaï, Hangchow, Canton,

Une année normale pour Erdős

Pendant l'année 1960 P. Erdős est passé par :

- Budapest,
- Moscou, Léningrad, Moscou, Irkoutsk,
- Oulan Bator,
- Pékin, Changaï, Hangchow, Canton,
- Hong Kong,

Une année normale pour Erdős

Pendant l'année 1960 P. Erdős est passé par :

- Budapest,
- Moscou, Léningrad, Moscou, Irkoutsk,
- Oulan Bator,
- Pékin, Changaï, Hangchow, Canton,
- Hong Kong,
- Singapour,

Une année normale pour Erdős

Pendant l'année 1960 P. Erdős est passé par :

- Budapest,
- Moscou, Léningrad, Moscou, Irkoutsk,
- Oulan Bator,
- Pékin, Changaï, Hangchow, Canton,
- Hong Kong,
- Singapour,
- Adélaïde.

"One never knew where Erdős was, not even the country. However, one could be sure that during the year Erdős was everywhere" (R. Bellman)

La méthode probabiliste

Une des questions récurrentes de combinatoire : construire des objets finis vérifiant certains propriétés.

- des configurations de points sans polygones convexes,
- des colorations de graphes vérifiant certaines contraintes (problème des 4 couleurs),
- des grands graphes très bien connectés mais avec peu d'arêtes ($\rightarrow$ atelier : Coupes de graphes), ...

La méthode probabiliste

Constructions explicites souvent difficiles.

Idée (Méthode probabiliste)

Tirer un grand objet « au hasard », intelligemment, et montrer qu'avec probabilité positive, il vérifie les conditions voulues.

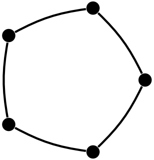
Une méthode extrêmement riche et fructueuse, initiée par Erdős.

Un exemple

Graphe : ensemble fini de sommets $S = \{1, ..., n\}$, ensemble fini d'arêtes (paires de sommets) $A = \{a_1, ..., a_m\}$.

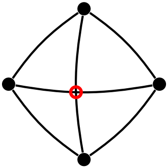
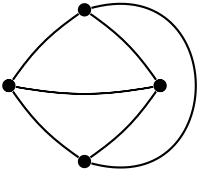
Définition

G est planaire si on peut le dessiner dans le plan sans croisement d'arêtes.

Les cycles sont planaires : 

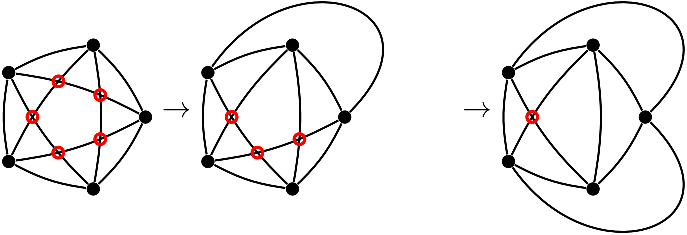
Un exemple

Les petits graphes complets sont planaires :

K_4 :  peut être dessiné « mieux » : 

Un exemple

K_5 n'est pas planaire :



On peut dessiner K_5 avec un seul croisement.

Un exemple

Question (L'usine de briques de Turán)

Étant donné un graphe G, quel est le nombre minimum de croisements cr(G) parmi tous les dessins de G ?

Grâce à la formule d'Euler (→ atelier : Papier, ciseaux... et topologie) pour les graphes planaires :

$$\#\{\text{sommets}\} - \#\{\text{arêtes}\} + \#\{\text{faces}\} = 2$$

on montre facilement :

$$\text{cr}(G) \geq m - 3n = \#\{\text{arêtes}\} - 3\#\{\text{sommets}\}.$$

Un exemple

Théorème (Borne « naïve »)

$$cr(G) \geq m - 3n.$$

- Formule intéressante dès que $m \geq 3n$.
- Pour des graphes « denses » (très connectés, $m \gg n$), donne asymptotiquement $\mathrm{cr}(G) \geq m$.
- Pour les graphes complets, $\mathrm{cr}(K_n) \leq n^4 \approx m^2$.

Question

Peut-on améliorer la borne inférieure pour les graphes denses ?

Lemme d'intersection

Lemme (Lemme d'intersection)

Pour $m \geq 4n$, le nombre de croisements vérifie :

$$\mathit{cr}(G) \geq \frac{m^3}{64n^2}.$$

Pour le graphe complet K_n, réconcilie les ordres de grandeurs des deux bornes : $\mathrm{cr}(K_n) \approx n^4$.

Lemme d'intersection

Lemme (Lemme d'intersection)

Pour $m \geq 4n$, le nombre de croisements vérifie :

$$\mathit{cr}(G) \geq \frac{m^3}{64n^2}.$$

Pour le graphe complet K_n, réconcilie les ordres de grandeurs des deux bornes : $\mathrm{cr}(K_n) \approx n^4$.

- Conjecturé par Erdős et Guy en 73.
- Premières preuves par Leighton (en vue d'applications à des circuits intégrés) ; Ajtai, Chvátal, Newborn et Szemerédi (82).
- Preuve « du Livre » par Chazelle, Sharir et Welzl.

La preuve du « Livre »

Idée

Appliquer la borne « naïve » cr$(G) \geq m - 3n$ à un sous-graphe peu dense, à n' sommets et m' arêtes, tel que $m' \approx 3n'$.

Question

Comment faire ?

Un exemple

Idée

Choisir le sous-graphe G_p aléatoirement ! On garde chaque sommet, indépendamment, avec probabilité p.
On efface les autres sommets et les arêtes qui en partent, on garde les arêtes entre les sommets conservés.

Un exemple

Idée

Choisir le sous-graphe G_p aléatoirement ! On garde chaque sommet, indépendamment, avec probabilité p.
On efface les autres sommets et les arêtes qui en partent, on garde les arêtes entre les sommets conservés.

- Une arête donnée est conservée si les sommets qu'elle joint le sont : proba. p^2.
- Un croisement est conservé si les 4 sommets concernés le sont : proba. p^4.

Point clé

Si $p \approx n/m$, G_p a alors approximativement autant de sommets ($np \approx n^2/m$) que d'arêtes ($mp^2 = n^2/m$) !

Un exemple

On applique la borne naïve à G_p, et on prend l'espérance :

$$\mathbf{E}\left[\mathrm{cr}(G_p)\right] \geq \mathbf{E}\left[M(G_p)\right] - 3\mathbf{E}\left[N(G_p)\right].$$

Nombre moyen d'arêtes : par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[M(G_p)\right] &= \mathbf{E}\left[\sum_{a \text{ arête de } G} \mathbf{1}_{\{a \text{ est dans } G_p\}}\right] \\
&= \sum_{a \text{ arête de } G} \mathbf{P}\left[a \text{ est dans } G_p\right] \\
&= p^2 m.
\end{aligned}$$

Un exemple

On applique la borne naïve à G_p, et on prend l'espérance :

$$\mathbf{E}\left[\mathrm{cr}(G_p)\right] \geq \mathbf{E}\left[M(G_p)\right] - 3\mathbf{E}\left[N(G_p)\right].$$

Nombre moyen d'arêtes : par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[M(G_p)\right] &= \mathbf{E}\left[\sum_{a \text{ arête de } G} \mathbf{1}_{\{a \text{ est dans } G_p\}}\right] \\ &= \sum_{a \text{ arête de } G} \mathbf{P}\left[a \text{ est dans } G_p\right] \\ &= p^2 m.\end{aligned}$$

De même pour les sommets (np) et les croisements ($p^4\mathrm{cr}(G)$).

$$p^4\mathrm{cr}(G) \geq mp^2 - 3np.$$

Donne le résultat pour $p = n/(4m)$.

Plan

Erdős et les graphes aléatoires

Erdős : un moteur de recherche et un réseau social avant la lettre !

> *Dans les années d'avant Internet, il y avait Paul Erdős. [...] Il connaissait tout les mathématiciens : leurs centres d'intérêt ; ce qu'ils avaient conjecturé, prouvé, ou ce qu'ils étaient en train de prouver ; leurs numéros de téléphone ; le nom et l'âge de leurs épouses, enfants et animaux familiers [...]. Il pouvait dire au débotté dans quel page de quel obscur journal russe on pouvait trouver la preuve d'un théorème similaire à celui sur lequel vous travailliez[...]. Pendant les années les plus dures de la guerre froide, sa renommée lui permettait de passer le Rideau de Fer, et en faisait un lien vital entre l'Est et l'Ouest.*
>
> *B. Schechter, My brain is open*

Le graphe d'Erdős–Rényi

Un modèle simple mais riche de graphe aléatoire : le graphe d'Erdős– Rényi.

Définition

Le graphe d'Erdős–Rényi est le graphe aléatoire obtenu à partir du graphe complet à n sommets en conservant aléatoirement chaque arête avec probabilité p.

Graphes aléatoires

L'étude de graphes aléatoires : modèles pour...

- les graphes de collaboration scientifiques, de citations,
- les réseaux sociaux,
- les écosystèmes,
- ...

Collaborations scientifiques et nombre d'Erdős

Le graphe des collaborations scientifiques :

Sommets : les auteurs d'articles scientifiques

Arêtes : entre auteurs qui ont publié au moins un article ensemble.

- Graphe très hétérogène : beaucoup de sommets de très faibles degrés, quelques sommets de degré grand, voire très grand.
- Erdős est de degré 511 (! !)
- *Nombre d'Erdős* d'un mathématicien : distance dans le graphe entre le mathématicien et la racine (Erdős).

Graphes aléatoires

- Le graphe obtenu est de diamètre *étonnament faible* (l'effet « petit monde »).
- Phénomènes similaires sur des graphes d'autres réseaux sociaux.
- Nombreux sujets de recherche actuels : quantification de ce phénomène, bons modèles de graphes aléatoires, diffusion de rumeurs ou d'épidémies...

Erdős a contribué énormément aux mathématiques, mais selon moi sa contribution la plus importante a été de créer un grand nombre de mathématiciens. Il était le "poseur de problèmes" par excellence[...]. Beaucoup de gens savent poser des questions frisant l'impossible ou totalement élémentaires, mais peu savent trouver la ligne de crête entre le trivial et l'inatteignable.[...]

Mais Erdős ne faisait pas que poser la bonne question : il la posait à la bonne personne. Il savait mieux que vous-même ce dont vous étiez capable. Combien de personnes se sont lancés dans la recherche en résolvant un de ses problèmes à 5 *ou même à* 1 *dollar ? Il savait donner la confiance dont beaucoup d'entre nous avaient besoin pour se lancer dans la recherche mathématique.*

Richard K. Guy

Sources / pour en savoir plus

Sur la vie d'Erdös :

- *My brain is open*, biographie de B. Schechter.
- N *is a number*, documentaire de G.P. Csicsery.

Sur les mathématiques :

- *Raisonnements divins*, M. Aigner, G.M. Ziegler
- *The Probabilistic Method*, N. Alon et J.H. Spencer
- *A puzzle of clever connections nears a happy end*, K. Hartnett, Quanta Magazine : article de vulgarisation sur le « Happy End Problem ».
- et bien sûr plus de 1500 articles scientifiques !