

## Types d'ordres, entre géométrie, combinatoire et algorithmique

Journées de formation, 17 janvier 2017

Activité proposée par Xavier Goaoc (UPEM)

### Exercice 1. Exemple introductif

On va examiner ici une première question de géométrie algorithmique afin de motiver l'introduction des types d'ordre. On suppose donné un repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  de  $\mathbb{R}^2$  et on notera les coordonnées d'un point  $p$  dans ce repère par  $(x_p, y_p)$ .

- a. Proposez un algorithme qui prend en entrée les coordonnées de quatre points  $p, q, r, s$  et retourne **vrai** si les segments  $[pq]$  et  $[rs]$  se coupent, et **faux** sinon.

**Qu'entend-on par algorithme ?** Il s'agit de décomposer la tâche à réaliser en une séquence d'*opérations élémentaires*. La liste des opérations élémentaires est définie par un *modèle de calcul*, par exemple le modèle de *machines de Turing*. Ici, on considérera comme opération élémentaire

- (a) le calcul d'expressions polynomiales en les paramètres d'entrée, et
- (b) les branchements **si... alors... sinon** dont le test est une combinaison booléenne (**et... ou... non**) de comparaisons d'expressions polynomiales en les paramètres d'entrée.

- b. On définit la fonction  $\sigma$  par

$$\sigma : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \{-1, 0, 1\} \\ x & \mapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

et pour tout points  $p, q, r \in \mathbb{R}^2$  on note

$$\omega(p, q, r) = \sigma \left( \begin{vmatrix} x_p & x_q & x_r \\ y_p & y_q & y_r \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right).$$

Proposez une interprétation géométrique de  $\omega(p, q, r)$ .

- c. Proposez un algorithme répondant à la première question en supposant que l'on n'a accès qu'aux valeurs  $\omega(a, b, c)$  où  $a, b, c \in \{p, q, r, s\}$ . On pourra présenter cet algorithme sous la forme d'un *arbre de décision algébrique*.

**Un arbre de décision algébrique** est un modèle de calcul qui n'autorise que l'évaluation des signes de polynômes en les entrées. Un *arbre* est un graphe sommet-arête connexe (on peut passer de tout sommet à tout sommet par une séquence d'arête), acyclique (enlever n'importe quelle arête casse la connexité) et dans lequel un sommet est distingué (la *racine*) ; les sommets de degré 1 sont les *feuilles*, les autres sont les *nœuds internes*. Un arbre de décision algébrique est un arbre dans lequel chaque nœud interne est de degré 3 ou 4, est étiqueté par un polynôme en les entrées, et dont les arêtes s'éloignant de la racine sont étiquetées par des signes  $(+, -, 0)$  distincts. Les feuilles sont étiquetées par **vrai** ou **faux**. Cf [jeffe.cs.illinois.edu/teaching/497/06-algebraic-tree.pdf](http://jeffe.cs.illinois.edu/teaching/497/06-algebraic-tree.pdf) pour plus de détails.

- d. Comparez les avantages et inconvénients des solutions proposées en a. et c. dans le cas où on effectue les calculs à la main, puis dans le cas où on effectue les calculs en **flottants**.

**Les flottants** sont la manière de coder un nombre à virgule sur un ordinateur. Ce codage utilise la notation scientifique en base 2 (qui écrit, par exemple, 73 comme  $1.001001 * 2^6$ ), en allouant un nombre de chiffres (*bits*) prescrit pour l'exposant et la partie décimale (aussi appelée *mantisse*). La norme IEEE 754-2008 décrit des conventions très largement suivies. Dans cette norme, les flottants *simple précision* occupent 32 bits, dont 8 pour l'exposant et 23 pour la mantisse, et les flottants *double précision* occupent 64 bits, dont 11 pour l'exposant et 53 pour la mantisse.

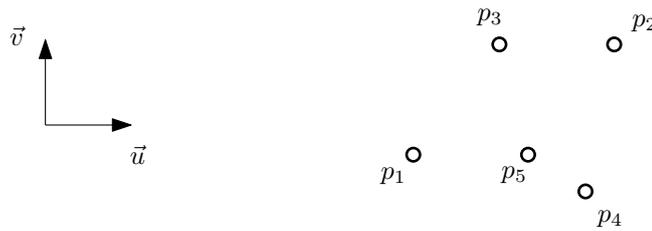
**Exercice 2. Chirotopes.**

Soit  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  un ensemble fini de points, deux à deux distincts, de  $\mathbb{R}^2$ . Le *chirotope* de  $P$  est la fonction

$$\chi_P : \begin{cases} \{1, 2, \dots, n\}^3 & \rightarrow \{-1, 0, 1\} \\ (i, j, k) & \mapsto \omega(p_i, p_j, p_k). \end{cases}$$

Un *chirotope* est une fonction  $f$  telle qu'il existe un ensemble fini de points  $P$  tel que  $\chi_P = f$ .

- a. Construire le chirotope de l'ensemble de points suivant :



- b. Démontrer qu'il existe un unique chirotope  $f$  satisfaisant

$$f(1, 2, 3) = f(1, 3, 4) = f(1, 4, 2) = 1.$$

- c. Construire une fonction  $g : \{1, 2, 3, 4\}^3 \rightarrow \{-1, 0, 1\}$  qui n'est *pas* un chirotope.
- d. On suppose connu le chirotope  $\chi_P$  d'un ensemble de points  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  mais pas les coordonnées des points  $p_i$ . Est-il possible de déterminer :
- (a) le point extrême de  $P$  dans la direction  $\vec{u}$ ,
  - (b) si le point  $p_i$  est intérieur au triangle  $p_j p_k p_\ell$ ,
  - (c) si la courbe polygonale  $p_1 p_2 \dots p_n$  est monotone dans la direction  $\vec{u}$ ,
  - (d) si un graphe sommet-arêtes donné peut se dessiner sans croisement en envoyant les sommets sur  $P$  et en réalisant les arêtes par des segments de droite,
  - (e) une triangulation et un appariement sans croisement de  $P$  ?

**Une triangulation** d'un ensemble de points est une famille maximale (pour l'inclusion) de segments à extrémités dans ces points et d'intérieur disjoint. **Un appariement sans croisement** d'un ensemble de  $2k$  points est une famille de  $k$  segments disjoints à extrémités dans ces points.

### Exercice 3. Types d'ordre.

Le chirotope est défini pour un ensemble de points *ordonné* : échanger les points  $p_1$  et  $p_2$  dans l'exemple de la question 2.a change le chirotope. On dit que deux chirotopes  $f$  et  $g$  sont *équivalents* s'il existe une bijection  $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  telle que

$$\forall i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}^3, \quad f(i, j, k) = g(\sigma(i), \sigma(j), \sigma(k)).$$

Cela définit une relation d'équivalence sur les chirotopes. Un *type d'ordre* est une classe d'équivalence pour cette relation. Le *type d'ordre d'un ensemble de points* est le type d'ordre de son chirotope (pour un ordre arbitraire des points).

- Prouver que deux sous-ensembles finis  $P$  et  $Q$  de  $\mathbb{R}^2$  ont même type d'ordre s'il existe une bijection  $f : P \rightarrow Q$  qui préserve les orientations.
- Prouver que pour tout entier  $n$ , le nombre de types d'ordre de taille  $n$  est fini.
- Lister les types d'ordre de taille 3, 4 et 5.
- Montrer que les triangulations de deux ensembles de point de même type d'ordre sont isomorphes.
- Déterminer les triangulations de chaque type d'ordre de taille 5.
- Déterminer les appariements sans croisement de chaque type d'ordre de taille 5.

**Pour aller plus loin.** De nombreux prolongements sont envisageables, par exemple :

- Les problèmes de **robustesse** lors de l'implantation d'algorithmes géométriques [KMP<sup>+</sup>08]. Commencer par [https://interstices.info/jcms/c\\_16014/un-joli-algorithme-geometrique-et-ses-vilains-problemes-numeriques](https://interstices.info/jcms/c_16014/un-joli-algorithme-geometrique-et-ses-vilains-problemes-numeriques)
- Les notions vues ici se généralisent en dimension quelconque. Un exemple simple d'algorithme basé sur les orientations de points 3D est celui de Devillers-Guigue [GD03] (voir aussi leur rapport Inria [DG02]).
- Seul une petite proportion des  $2^{\binom{n}{3}}$  fonctions  $\{1, 2, \dots, n\}^3 \rightarrow \{-1, 0, 1\}$  sont des chirotopes. Le nombre de types d'ordre de taille  $n$  est de l'ordre de  $2^{4n \log_2 n + o(n \log_2 n)}$  [Alo86, § 4]. Le principal ingrédient pour prouver cela est l'étude de polynômes multivariés (une version plus faible découle du théorème de Thom-Milnor).
- Les chirotopes et types d'ordre peuvent se définir sur les ensembles de droites du plan, par dualité. Ce point de vue se généralise ensuite aux *arrangements de pseudo-droites*, qui sont des familles de courbes du plan (connexes et non-bornées) telles que chaque paire se croise en exactement un point. Cette généralisation a une axiomatisation élémentaire sous forme de *matroïde orienté*, objets centraux en optimisation combinatoire. Un point d'entrée très accessible à ce vaste domaine est la monographie de Knuth [Knu92] (disponible sur sa page web).
- L'ouvrage [BMP06] comporte une mine de questions de recherche en géométrie combinatoire. Les énoncés sont souvent accessibles avec un bagage minime. Les problèmes sont généralement ouverts en général, mais l'ouvrage pointe sur des cas faciles ou connus.

- f. Un exemple de problème qui peut se formuler sur les types d'ordre est la *conjecture de Erdős-Szekeres*. Elle énonce que pour tout entier  $k$ , tout ensemble d'au moins  $2^{k-2} + 1$  points du plan (sans triplet aligné) contient  $k$  points en position convexe. Des versions faibles (pour des valeurs supérieures à  $2^{k-2} + 1$ ) sont connues, mais la conjecture originelle résiste depuis un demi-siècle. Des progrès notables ont été obtenus en 2016 : <https://arxiv.org/abs/1604.08657>.

## References

- [Alo86] N. Alon. The number of polytopes, configurations and real matroids. *Mathematika*, 33:62–71, 1986.
- [BMP06] Peter Brass, William OJ Moser, and János Pach. *Research problems in discrete geometry*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [DG02] Olivier Devillers and Philippe Guigue. *Faster triangle-triangle intersection tests*. PhD thesis, INRIA, 2002.
- [GD03] Philippe Guigue and Olivier Devillers. Fast and robust triangle-triangle overlap test using orientation predicates. *Journal of graphics tools*, 8(1):25–32, 2003.
- [KMP<sup>+</sup>08] Lutz Kettner, Kurt Mehlhorn, Sylvain Pion, Stefan Schirra, and Chee Yap. Classroom examples of robustness problems in geometric computations. *Computational Geometry*, 40(1):61–78, 2008.
- [Knu92] Donald E Knuth. Axioms and hulls. *Lecture notes in computer science*, 606, 1992.