Le problème du partage du collier

Frédéric Meunier

17 janvier 2017

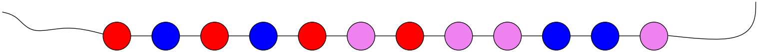
CERMICS, Optimisation et Systèmes

Deux voleurs et un collier

n perles, t types de perles, a_i (pair) perles de chaque type.

Deux voleurs : Alice et Bob.

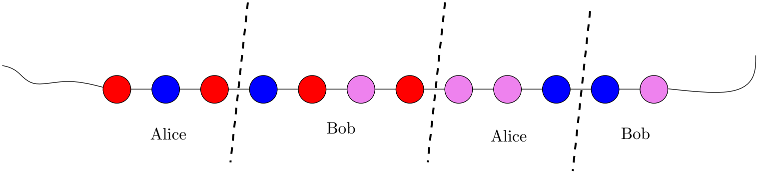
Perles fixées sur la chaînette.



Partage équitable = chaque voleur reçoit $a_i/2$ perles du type i

Le théorème du collier

Théorème. (Alon-Goldberg-West 1985) *Il existe un partage équitable du collier ne nécessitant pas plus de t coupes.*



On ne peut espérer mieux

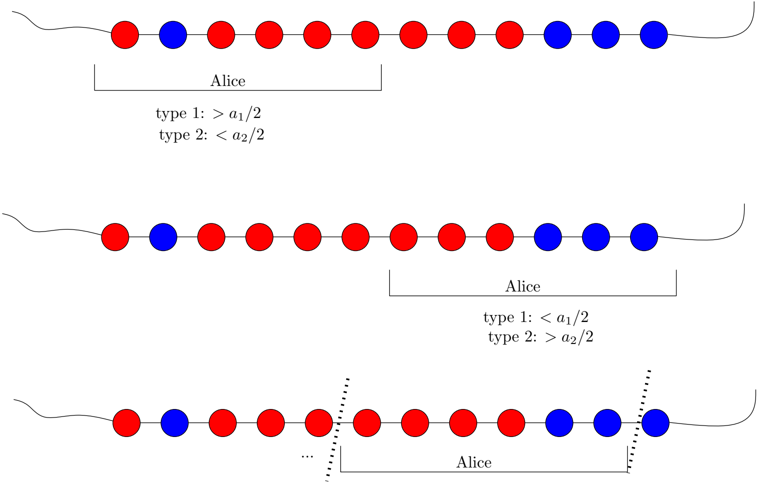
t coupes sont parfois nécessaires

Plan

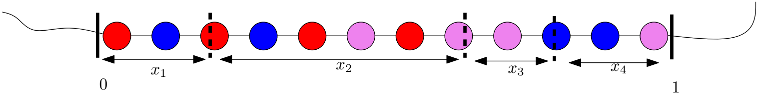
1. Preuves et algorithmes
2. Un cas particulier: le problème du collier binaire
3. Généralisations
4. Questions ouvertes

Preuves et algorithmes

Preuve simple quand il n'y a que deux types



Preuve dans le cas général

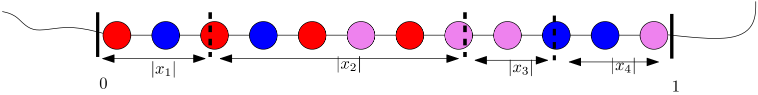


- Découpage “continue” en t coupes :

$$(x_1, \ldots, x_{t+1}) \in \mathbb{R}_+^{t+1} \text{ tel que } \sum_{i=1}^{t+1} x_i = 1.$$

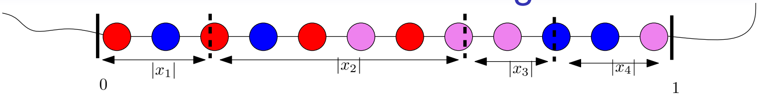
- Comment encoder l’affectation des parts aux voleurs ?

Preuve dans le cas général



- Découpage "continue" en t coupes : $(x_1, \ldots, x_{t+1}) \in \mathbb{R}^{t+1}$ tel que $\sum_{i=1}^{t+1} |x_i| = 1$.
- si $x_i > 0$, alors la part i va à Alice,
  si $x_i < 0$, alors la part i va à Bob.

Preuve dans le cas général



- Découpage “continue” en t coupes : $(x_1, \dots, x_{t+1}) \in \mathbb{R}^{t+1}$ tel que $\sum_{i=1}^{t+1} |x_i| = 1$.
- On définit

$$f(x_1, \dots, x_{t+1}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_t \end{pmatrix} \text{ avec } y_i = \text{déséquilibre pour le type } i$$

Exemple : $x_1 > 0, x_2 < 0, x_3 > 0, x_4 > 0$.

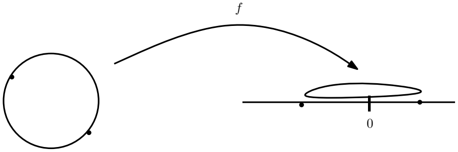
$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 1.3 - 2.7 \\ 3 - 1 \\ 2.2 - 1.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.4 \\ 2 \\ -0.4 \end{pmatrix}$$

Preuve dans le cas général

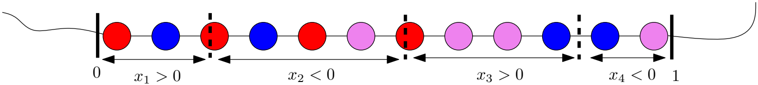
$$S^t = \left\{ (x_1, \ldots, x_{t+1}) \in \mathbb{R}^{t+1} : \sum_{i=1}^{t+1} |x_i| = 1 \right\}.$$

$$\begin{array}{rccc} f: & S^t & \longrightarrow & \mathbb{R}^t \\ & (x_1, \ldots, x_{t+1}) & \longmapsto & \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{t+1} \mathrm{sgn}(x_i)\mu_1[X_i, X_{i+1}) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{t+1} \mathrm{sgn}(x_i)\mu_t[X_i, X_{i+1}) \end{pmatrix} \end{array}$$

- f est antipodale $f(-x) = -f(x)$.
- f est continue.
- Théorème de Borsuk-Ulam : $\exists x_0 : \ f(x_0) = 0$.



Preuve dans le cas général



Etant donné un partage équitable “continue”, on peut toujours “bouger” un peu les coupes de manière à obtenir un partage équitable “discret”.

Preuves élémentaires et algorithmes

Preuve élémentaire ?

- A part quand $t = 2$, quand $t = 3$ ou quand $a_i = 2$ pour tout i, on ne connaît pas de preuve élémentaire du théorème du collier.

Algorithme ?

- Méthode naïve : énumérer tous les découpages à t coupes, peut nécessiter jusqu'à $\binom{n+t}{t}$ opérations. Peut être très long !

  Si $n = 4t$, le nombre d'opérations peut dépasser (Stirling) $\dfrac{12^t}{t\sqrt{2\pi}}$

Question ouverte. (Papadimitriou 1994) *Existe-t-il un algorithme polynomial, i.e. dont le nombre d'opérations est borné par un certain polynôme $P(n, t)$?*

Optimiser : c'est difficile !

Théorème du collier : *il existe un partage équitable en au plus t coupes*.

On peut parfois avoir des partages en beaucoup moins que t coupes. (Et même parfois une seule coupe peut suffire).

Théorème. (Epping-Hochstättler 2006) *Trouver un partage équitable avec le moins de coupes possible est NP-difficile.*

NP-difficile $\approx$ il ne peut y avoir d'algorithme polynomial.

Problème du collier binaire

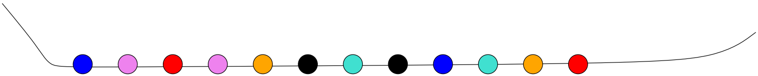
Définition

PROBLÈME DU COLLIER BINAIRE (Epping-Hochstättler-Oertel 2001)

Input. Collier à t types of perles, 2 perles par type.

($n = 2t$ et $a_i = 2$ pour tout i.)

Output. Partage équitable minimisant le nombre de coupes.



Introduit dans un contexte de recherche opérationnelle en tant que problème de l'atelier de peinture (industrie automobile)

Minimiser le nombre de coupes

Théorème du collier $\Longrightarrow$ l'optimum est inférieur ou égal à t
Mais c'est évident par un algorithme glouton.

Ici, le challenge, c'est optimiser.

Proposition. (Epping-Hochstättler 2006) Le PROBLÈME DU COLLIER BINAIRE est NP-difficile.

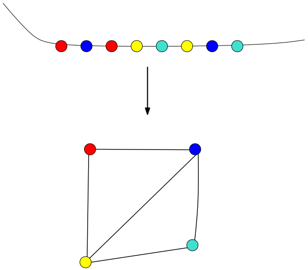
Résultats positifs

M.-Sebö 2009

OPT $\leq \frac{3}{4}t + \frac{1}{4}\beta$, *où* $\beta =$ *“coupes forcées”* *(* *et* *). Peut être trouvé en temps polynomial.*

Soit $G = ([t], E)$, avec $ij \in E$ si types i et j adjacents sur le collier.

G planaire $\Rightarrow$ Peut être trouvé en temps polynomial.



Algorithme glouton

Deux questions

- Quelle est l'espérance du nombre de coupes donné par l'algorithme glouton ? (colliers tirés uniformément au hasard parmi ceux de taille fixée)

- Quand l'algorithme glouton est-il optimal ?

Espérance du nombre de coupes

g: nombre de coupes donné par l'algorithme glouton (colliers tirés uniformément au hasard parmi ceux de taille fixée)

Proposition. (Andres-Hochstättler 2010)

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \mathbb{E}_t(g) = \frac{1}{2}.$$

Preuve.

$$\mathbb{E}_t(g) = \mathbb{E}_{t-1}(g) + \frac{2(t-1)^2 - 1}{4(t-1)^2 - 1}.$$

$\square$

Optimalité de l'algorithme glouton

Collier = mot w sur un alphabet de taille t.

Théorème. (M.-Sebö, 2009; Rautenbach-Szigeti 2012) *Si w ne contient aucun des mots*

abaccb *abbcddac* *abbcdcad*

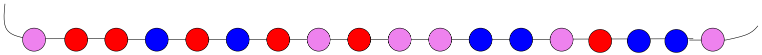
comme sous-mot, alors l'algorithme glouton est optimal.

Généralisations

q voleurs et un collier

n perles, t types de perles, a_i (multiple de q) perles de chaque type.

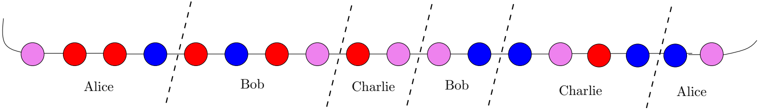
q voleurs : Alice, Bob, Charlie,...



Une généralisation

Partage équitable = chaque voleur reçoit a_i/q perles du type i

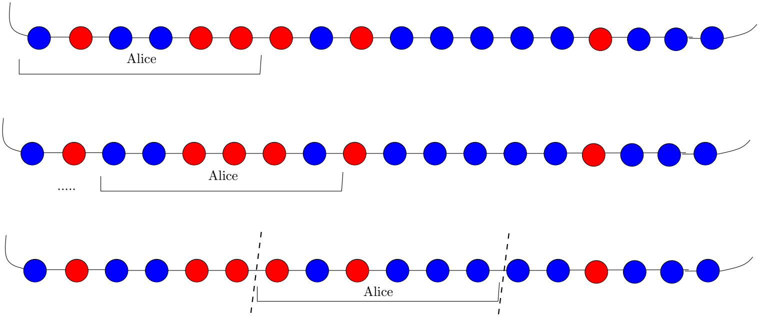
Théorème. (Alon 1987) *Il existe un partage équitable ne nécessitant pas plus de* $(q-1)t$ *coupes.*



On ne peut espérer mieux

$(q-1)t$ sont parfois nécessaires :

Cas facile : deux types de perles (à nouveau !)



... puis récurrence sur le nombre de voleurs.

Preuve dans le cas général

Supposons que q soit un nombre premier.
Z_q = ensemble des racines $q^{\text{èmes}}$ de l'unité.

$$\Sigma^{(q-1)t} = \left\{ (\omega_i, x_i)_{i \in [(q-1)t+1]} \in (Z_q \times \mathbb{R}_+)^{(q-1)t+1} : \sum_{i=1}^{(q-1)t+1} x_i = 1 \right\}.$$

$$f : \quad \Sigma^{(q-1)t} \quad \longrightarrow \quad \prod_{\omega \in Z_q} \mathbb{R}^t$$

- f est équivariante $f(\omega x) = \omega \cdot f(x)$.
- f est continue.
- Théorème de Dold : $\exists x_0, \forall \omega \in Z_q,\ f(x_0) = \omega \cdot f(x_0)$.

Preuve dans le cas général

Comment passer du cas q premier au cas général ?

Proposition. *Si le théorème du collier est vrai pour q_1 et pour q_2, alors il est vrai pour $q_1 q_2$.*

Preuve.

1. On partitionne les $q_1 q_2$ voleurs en q_1 super-voleurs, chacun constitué de q_2 voleurs.
2. Partager les perles entre les q_1 super-voleurs : au plus $(q_1 - 1)t$ coupes.
3. Partager les perles entre les q_2 voleurs d'un super-voleur: $(q_2 - 1)t$ coupes.
4. Au total : $q_1(q_2 - 1)t + (q_1 - 1)t = (q_1 q_2 - 1)t$ coupes. $\square$

Preuves élémentaires et algorithmes

Preuve élémentaire ?

- A part quand $t = 2$ ou quand $a_i = q$ pour tout i, on ne connaît pas de preuve élémentaire du théorème du collier.

Algorithme ?

- Méthode naïve : énumérer tous les découpages à t coupes, peut nécessiter jusqu'à $\binom{n+(q-1)t}{(q-1)t}$ opérations. Peut être très très long !

Question ouverte. (Papadimitriou 1994) *Existe-t-il un algorithme polynomial, i.e. dont le nombre d'opérations est borné par un certain polynôme $P(n, t, q)$?*

Généralisation à q voleurs

n perles, t types de perles, a_i perles de chaque type, q voleurs.

Partage équitable = chaque voleur reçoit $\lfloor a_i/q \rfloor$ ou $\lceil a_i/q \rceil$ perles du type i, pour tout i.

Théorème (Alon-Moshkovitz Safra 2006) *Il existe un partage équitable du collier en au plus $(q-1)t$ coupes.*

Preuves directes

- pour $t = 2$
- $1 \leq a_i \leq q$ pour tout i.

Encore plus général ?

Conjecture. (M. 2008, Pálvölgyi 2009) *Il existe un partage équitable en au plus $(q-1)t$ coupes tel que pour tout i, on peut choisir les voleurs recevant $\lfloor a_i/q \rfloor$ et ceux recevant $\lceil a_i/q \rceil$.*

Vrai dans les cas suivants

- $q = 2$
- $t = 2$
- $1 \leq a_i \leq q$ pour tout i.

Collier multidimensionnel

Théorème. (De Longueville-Živaljević 2008) *Soient* $\mu_1, \ldots, \mu_t$ *des mesures de probabilité continues sur* $[0,1]^d$. *Soient* $m_1, \ldots, m_d$ *des entiers positifs tels que* $m_1 + \cdots + m_d = (q-1)t$. *Alors il existe un partage équitable de* $[0,1]^d$ *déterminé par* m_i *hyperplans parallèles à l'hyperplan de la* i*ème coordonnée pour tout* i.

La version discrète n'est pas vraie (Lasoń 2015).

Questions ouvertes (récapitulatif)

Questions ouvertes

- Complexité du calcul d'un partage équitable en au plus t coupes quand il y a deux voleurs.
- Complexité du calcul d'un partage équitable en au plus $(q-1)t$ coupes quand il y a q voleurs.
- Existence d'un partage équitable avec choix possible des voleurs avantagés.
- Preuve élémentaire du théorème du collier (n'importe quelle version).

- Espérance de l'optimum dans le problème du collier binaire.
- Etendre certains résultats du cas binaire aux colliers plus généraux (au moins pour deux voleurs).

Un article en ligne

Article de vulgarisation disponible dans la revue en ligne *Image des mathématiques*

http://images.math.cnrs.fr/Le-probleme-du-collier

Références

C. H. Goldberg and D. B. West, *Bisection of circle colorings*, SIAM J. Algebraic Discrete Methods (1985).

N. Alon and D. B. West, *The Borsuk-Ulam Theorem and bisection of necklaces*, Proc. Amer. Math. Soc. (1986).

N. Alon, *Splitting necklaces*, Adv. in Math. (1987).

C. Papadimitriou, *On the complexity of the parity argument and other inefficient proofs of existence*, J. Comput System Sci. (1994).

Th. Epping, W. Hochstättler, P. Oertel, *Complexity result on a paint shop problem*, Discrete Appl. Math., (2004).

N. Alon, D. Moshkovitz, and S. Safra, *Algorithmic construction of sets for k-restrictions*, ACM Trans. Algorithms (2006).

P. S. Bonsma, T. Epping, and W. Hochstättler, *Complexity results on restricted instances of a paint shop problem for words*, Discrete Appl. Math. (2006).

G. Simonyi, *Necklace bisection with one cut less than needed*, The Electronic Journal of Combinatorics (2008).

M. de Longueville, R. Živaljević, *Splitting multidimensional necklaces*, Adv. in Math. (2008).

FM, *Discrete splittings of the necklace*, Math. of OR (2008).

D. Pálvölgyi, *Combinatorial necklace splitting*, The Electronic Journal of Combinatorics (2009).

FM and A. Sebö, *Paint shop, odd cycles and splitting necklace*, Discrete Appl. Math. (2009).

D. Andres and W. Hochstättler, *Some heuristics for the binary paintshop problem and their expected number of colour changes*, Journal of Discrete Algorithms (2011).

D. Rautenbach, Z. Szigeti, *Greedy colorings of words*, Discrete Appl. Math. (2012).

A. Gupta, S. Kale, V. Nagarajan, R. Saket, B. Schieber, *The Approximability of the Binary Paintshop Problem*, APPROX-RANDOM 2013.

FM, *Simplotopal maps and necklace splitting*, Discrete Mathematics (2014).

Merci