

# Panorama

## Probabilités - Statistiques

### PROBABILITES :

*Modélisation d'une expérience aléatoire*  
*Loi des grands nombres*  
*Théorème de Moivre-Laplace - Loi Normale*  
*Intervalle de fluctuation*

### STATISTIQUES :

*Estimateur ponctuel*  
*Intervalle de confiance*  
*Test sur le paramètre  $p$  d'une loi Binomiale*

Janvier 2014

N. Gozlan, P-M. Samson  
Université Paris-Est Marne-la-Vallée

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition  
Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires  
Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction  
Construction du test

## Définition : Espace de probabilité

Une expérience aléatoire est modélisée par la donnée :

- d'un ensemble  $\Omega$ 
  - $\rightsquigarrow$  permet de décrire les issues possibles de l'expérience.
  - $\rightsquigarrow$  les sous ensembles de  $\Omega$  sont appelés **événements**.
- d'une fonction  $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ , appelée **mesure de probabilité**, vérifiant les propriétés suivantes :
  - $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ ,
  - Si  $A \cap B = \emptyset$  alors  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ .
    - $\rightsquigarrow$  permet de quantifier le caractère plus ou moins certain des événements.

## PROBABILITES

### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

#### Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

## STATISTIQUES

### V – Estimateur ponctuel

### VI – Intervalle de confiance

### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Définition : Espace de probabilité

Une expérience aléatoire est modélisée par la donnée :

- d'un ensemble  $\Omega$ 
  - $\rightsquigarrow$  permet de décrire les issues possibles de l'expérience.
  - $\rightsquigarrow$  les sous ensembles de  $\Omega$  sont appelés **événements**.
- d'une fonction  $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ , appelée **mesure de probabilité**, vérifiant les propriétés suivantes :
  - $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ ,
  - Si  $A \cap B = \emptyset$  alors  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ .
    - $\rightsquigarrow$  permet de quantifier le caractère plus ou moins certain des événements.

**Remarque :** En réalité la probabilité  $\mathbb{P}$  ne peut être définie que sur une sous-classe d'ensembles. De plus, on impose une propriété d'additivité valable pour des unions dénombrables d'événements.

## PROBABILITES

### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

#### Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

## STATISTIQUES

### V – Estimateur ponctuel

### VI – Intervalle de confiance

### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

Si

$$\Omega = \{\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(N)}\}$$

est un ensemble fini,  $\mathbb{P}$  est complètement déterminée par la donnée des nombres  $\mathbb{P}(\{\omega^{(j)}\})$ .

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

##### Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Quelques exemples

Si

$$\Omega = \{\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(N)}\}$$

est un ensemble fini,  $\mathbb{P}$  est complètement déterminée par la donnée des nombres  $\mathbb{P}(\{\omega^{(j)}\})$ .

Si aucune issue n'est privilégiée, on adopte la **probabilité uniforme** sur  $\Omega$  définie par

$$\mathbb{P}(\{\omega^{(j)}\}) = \frac{1}{N}, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}.$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

##### Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Quelques exemples

Si

$$\Omega = \{\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(N)}\}$$

est un ensemble fini,  $\mathbb{P}$  est complètement déterminée par la donnée des nombres  $\mathbb{P}(\{\omega^{(j)}\})$ .

Si aucune issue n'est privilégiée, on adopte la **probabilité uniforme** sur  $\Omega$  définie par

$$\mathbb{P}(\{\omega^{(j)}\}) = \frac{1}{N}, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}.$$

Exemples :

- Jeu de pile ou face.

$$\Omega = \{0, 1\}, \quad \mathbb{P}(\{1\}) = p, \quad \mathbb{P}(\{0\}) = 1 - p.$$

## PROBABILITES

I – Modélisation d'une  
expérience aléatoire

## Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

II – Loi des grands  
nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombresIII – Théorème de  
Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normaleIV – Intervalle de  
fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

## STATISTIQUES

V – Estimateur  
ponctuelVI – Intervalle de  
confiance

## VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Quelques exemples

Si

$$\Omega = \{\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(N)}\}$$

est un ensemble fini,  $\mathbb{P}$  est complètement déterminée par la donnée des nombres  $\mathbb{P}(\{\omega^{(j)}\})$ .

Si aucune issue n'est privilégiée, on adopte la **probabilité uniforme** sur  $\Omega$  définie par

$$\mathbb{P}(\{\omega^{(j)}\}) = \frac{1}{N}, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}.$$

Exemples :

- Jeu de pile ou face.

$$\Omega = \{0, 1\}, \quad \mathbb{P}(\{1\}) = p, \quad \mathbb{P}(\{0\}) = 1 - p.$$

- Lancer de dé.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad \mathbb{P}(\{j\}) = \frac{1}{6}$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

##### Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Quelques exemples

Si

$$\Omega = \{\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(N)}\}$$

est un ensemble fini,  $\mathbb{P}$  est complètement déterminée par la donnée des nombres  $\mathbb{P}(\{\omega^{(j)}\})$ .

Si aucune issue n'est privilégiée, on adopte la **probabilité uniforme** sur  $\Omega$  définie par

$$\mathbb{P}(\{\omega^{(j)}\}) = \frac{1}{N}, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}.$$

Exemples :

- Jeu de pile ou face.

$$\Omega = \{0, 1\}, \quad \mathbb{P}(\{1\}) = p, \quad \mathbb{P}(\{0\}) = 1 - p.$$

- Lancer de dé.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad \mathbb{P}(\{j\}) = \frac{1}{6}$$

- Tirage de carte.

$$\Omega = \text{Jeu de carte}, \quad \mathbb{P}(\{\text{carte}\}) = 1/32.$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

##### Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test



## Définition informelle : Schéma de Bernoulli

Il s'agit de l'expérience aléatoire consistant à **répéter  $n$  fois de suite**, de façon identique, **une épreuve à deux issues** possibles, le Succès ou l'Échec.

## PROBABILITES

### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

#### Schémas de Bernoulli

### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

## STATISTIQUES

### V – Estimateur ponctuel

### VI – Intervalle de confiance

### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Définition informelle : Schéma de Bernoulli

Il s'agit de l'expérience aléatoire consistant à **répéter  $n$  fois de suite**, de façon identique, **une épreuve à deux issues** possibles, le **Succès** ou l'**Échec**.

## Exemple concret :

Une urne contient des bonbons et des cailloux. Il y a succès lorsqu'on tire un bonbon et échec sinon. On effectue  $n$  tirages, en n'oubliant pas, après chaque tirage, de remettre dans l'urne ce que l'on a tiré (*tirage avec remise*).

## PROBABILITES

### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

#### Schémas de Bernoulli

### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

## STATISTIQUES

### V – Estimateur ponctuel

### VI – Intervalle de confiance

### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Modélisation du Schéma de Bernoulli

- Le résultat de cette expérience aléatoire peut être modélisé par une suite de longueur  $n$  de 0 et de 1,

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n),$$

avec

$$\omega_i = \begin{cases} 1 & \text{si le résultat de la } i\text{-ème épreuve est un Succès,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

#### Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Modélisation du Schéma de Bernoulli

- Le résultat de cette expérience aléatoire peut être modélisé par une suite de longueur  $n$  de 0 et de 1,

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n),$$

avec

$$\omega_i = \begin{cases} 1 & \text{si le résultat de la } i\text{-ème épreuve est un Succès,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- L'ensemble des résultats est donc  $\Omega = \{0, 1\}^n$ .

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

#### Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Modélisation du Schéma de Bernoulli

- Le résultat de cette expérience aléatoire peut être modélisé par une suite de longueur  $n$  de 0 et de 1,

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n),$$

avec

$$\omega_i = \begin{cases} 1 & \text{si le résultat de la } i\text{-ème épreuve est un Succès,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- L'ensemble des résultats est donc  $\Omega = \{0, 1\}^n$ .
- Pour tout  $\omega \in \Omega$ , on définit

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{\omega\}) &= p^{\text{Nombre de 1 dans } \omega} (1-p)^{\text{Nombre de 0 dans } \omega} \\ &= p^k (1-p)^{n-k}, \end{aligned}$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

#### Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Modélisation du Schéma de Bernoulli

- Le résultat de cette expérience aléatoire peut être modélisé par une suite de longueur  $n$  de 0 et de 1,

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n),$$

avec

$$\omega_i = \begin{cases} 1 & \text{si le résultat de la } i\text{-ème épreuve est un Succès,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- L'ensemble des résultats est donc  $\Omega = \{0, 1\}^n$ .
- Pour tout  $\omega \in \Omega$ , on définit

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{\omega\}) &= p^{\text{Nombre de 1 dans } \omega} (1-p)^{\text{Nombre de 0 dans } \omega} \\ &= p^k (1-p)^{n-k}, \end{aligned}$$

où

- $p \in [0, 1]$  est la probabilité de succès
- $k$  est le nombre de coordonnées de  $\omega$  égales à 1.

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

#### Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Modélisation du Schéma de Bernoulli

- Le résultat de cette expérience aléatoire peut être modélisé par une suite de longueur  $n$  de 0 et de 1,

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n),$$

avec

$$\omega_i = \begin{cases} 1 & \text{si le résultat de la } i\text{-ème épreuve est un Succès,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- L'ensemble des résultats est donc  $\Omega = \{0, 1\}^n$ .
- Pour tout  $\omega \in \Omega$ , on définit

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{\omega\}) &= p^{\text{Nombre de 1 dans } \omega} (1-p)^{\text{Nombre de 0 dans } \omega} \\ &= p^k (1-p)^{n-k}, \end{aligned}$$

où

- $p \in [0, 1]$  est la probabilité de succès
- $k$  est le nombre de coordonnées de  $\omega$  égales à 1.

On a bien

$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1.$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Justification du modèle précédent

On se place dans la situation des  $n$  tirages avec remise de cailloux / bonbons.

On note :

- $m_0$  le nombre de cailloux,  $m_1$  le nombre de bonbons
- $m = m_0 + m_1$  et  $p = m_1/m$ .

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test



## Justification du modèle précédent

On se place dans la situation des  $n$  tirages avec remise de cailloux / bonbons.

On note :

- $m_0$  le nombre de cailloux,  $m_1$  le nombre de bonbons
- $m = m_0 + m_1$  et  $p = m_1/m$ .

On “colle” sur chaque objet un numéro pour les individualiser : les cailloux sont numérotés de 1 à  $m_0$  et les bonbons de  $m_0 + 1$  à  $m$ . On s’est ainsi ramené à un tirage avec remise de boules numérotées.

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Justification du modèle précédent

On se place dans la situation des  $n$  tirages avec remise de cailloux / bonbons.

On note :

- $m_0$  le nombre de cailloux,  $m_1$  le nombre de bonbons
- $m = m_0 + m_1$  et  $p = m_1/m$ .

On “colle” sur chaque objet un numéro pour les individualiser : les cailloux sont numérotés de 1 à  $m_0$  et les bonbons de  $m_0 + 1$  à  $m$ . On s’est ainsi ramené à un tirage avec remise de boules numérotées.

Etant données les conditions dans lesquelles l’expérience est menée, on peut faire l’hypothèse d’**équiprobabilité des séquences de numéros**.

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d’une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d’échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d’hypothèse

Introduction

Construction du test

## Justification du modèle précédent

On se place dans la situation des  $n$  tirages avec remise de cailloux / bonbons.

On note :

- $m_0$  le nombre de cailloux,  $m_1$  le nombre de bonbons
- $m = m_0 + m_1$  et  $p = m_1/m$ .

On “colle” sur chaque objet un numéro pour les individualiser : les cailloux sont numérotés de 1 à  $m_0$  et les bonbons de  $m_0 + 1$  à  $m$ . On s’est ainsi ramené à un tirage avec remise de boules numérotées.

Etant données les conditions dans lesquelles l’expérience est menée, on peut faire l’hypothèse d’**équiprobabilité des séquences de numéros**.

Soit  $\omega \in \{0, 1\}^n$  et  $k$  le nombre de 1 dans  $\omega$  ; on peut supposer sans perte de généralité que les  $k$  succès ont tous lieu lors des  $k$  premiers tirages.

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d’une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d’échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d’hypothèse

Introduction

Construction du test

On se place dans la situation des  $n$  tirages avec remise de cailloux / bonbons.

On note :

- $m_0$  le nombre de cailloux,  $m_1$  le nombre de bonbons
- $m = m_0 + m_1$  et  $p = m_1/m$ .

On “colle” sur chaque objet un numéro pour les individualiser : les cailloux sont numérotés de 1 à  $m_0$  et les bonbons de  $m_0 + 1$  à  $m$ . On s’est ainsi ramené à un tirage avec remise de boules numérotées.

Etant données les conditions dans lesquelles l’expérience est menée, on peut faire l’hypothèse d’**équiprobabilité des séquences de numéros**.

Soit  $\omega \in \{0, 1\}^n$  et  $k$  le nombre de 1 dans  $\omega$  ; on peut supposer sans perte de généralité que les  $k$  succès ont tous lieu lors des  $k$  premiers tirages.

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) =$$

$$\frac{\text{Card}\{(x_1, \dots, x_n); x_1, \dots, x_k \in \{m_0 + 1, \dots, m\} \text{ et } x_{k+1}, \dots, x_n \in \{1, \dots, m_0\}\}}{m^n}$$

$$= \frac{m_1^k m_0^{n-k}}{m^n} = p^k (1 - p)^{n-k},$$

avec  $p = m_1/m$ .

### PROBABILITES

I – Modélisation d’une  
expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

II – Loi des grands  
nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

III – Théorème de  
Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

IV – Intervalle de  
fluctuation

Fluctuation d’échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

V – Estimateur  
ponctuel

VI – Intervalle de  
confiance

VII – Test d’hypothèse

Introduction

Construction du test

On se place dans la situation des  $n$  tirages avec remise de cailloux / bonbons.

On note :

- $m_0$  le nombre de cailloux,  $m_1$  le nombre de bonbons
- $m = m_0 + m_1$  et  $p = m_1/m$ .

On “colle” sur chaque objet un numéro pour les individualiser : les cailloux sont numérotés de 1 à  $m_0$  et les bonbons de  $m_0 + 1$  à  $m$ . On s’est ainsi ramené à un tirage avec remise de boules numérotées.

Etant données les conditions dans lesquelles l’expérience est menée, on peut faire l’hypothèse d’**équiprobabilité des séquences de numéros**.

Soit  $\omega \in \{0, 1\}^n$  et  $k$  le nombre de 1 dans  $\omega$  ; on peut supposer sans perte de généralité que les  $k$  succès ont tous lieu lors des  $k$  premiers tirages.

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) =$$

$$\frac{\text{Card}\{(x_1, \dots, x_n); x_1, \dots, x_k \in \{m_0 + 1, \dots, m\} \text{ et } x_{k+1}, \dots, x_n \in \{1, \dots, m_0\}\}}{m^n}$$

$$= \frac{m_1^k m_0^{n-k}}{m^n} = p^k (1 - p)^{n-k},$$

avec  $p = m_1/m$ .

### PROBABILITES

I – Modélisation d’une  
expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

II – Loi des grands  
nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

III – Théorème de  
Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

IV – Intervalle de  
fluctuation

Fluctuation d’échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

V – Estimateur  
ponctuel

VI – Intervalle de  
confiance

VII – Test d’hypothèse

Introduction

Construction du test

### Définition : Variable aléatoire

Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace de probabilité. Une variable aléatoire  $X$  est une fonction définie sur  $\Omega$  et à valeurs dans un autre ensemble  $E$ .

Une variable aléatoire focalise sur un certain aspect de l'expérience aléatoire. Lorsque  $E$  est un ensemble fini ou dénombrable, on parle de v.a. discrètes.

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

### Définition : Variable aléatoire

Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace de probabilité. Une variable aléatoire  $X$  est une fonction définie sur  $\Omega$  et à valeurs dans un autre ensemble  $E$ .

Une variable aléatoire focalise sur un certain aspect de l'expérience aléatoire. Lorsque  $E$  est un ensemble fini ou dénombrable, on parle de v.a. discrètes.

### Exemples :

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$  et  $X(\omega) = \omega_1 + \omega_2$  (score lors d'un lancer de deux dés.)
- $\Omega = \text{Jeu de cartes}$  et  $X(\omega) = \text{couleur de la carte}$ .

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

#### Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

### Définition : Variable aléatoire

Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace de probabilité. Une variable aléatoire  $X$  est une fonction définie sur  $\Omega$  et à valeurs dans un autre ensemble  $E$ .

Une variable aléatoire focalise sur un certain aspect de l'expérience aléatoire. Lorsque  $E$  est un ensemble fini ou dénombrable, on parle de v.a. discrètes.

### Exemples :

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$  et  $X(\omega) = \omega_1 + \omega_2$  (score lors d'un lancer de deux dés.)
- $\Omega =$  Jeu de cartes et  $X(\omega) =$  couleur de la carte.

### Définition : Indépendance de variables aléatoires

Deux variables aléatoires  $X_1, X_2$  définies sur un même espace de probabilité  $(\Omega, \mathbb{P})$  sont dites **indépendantes** si

$$\mathbb{P}(\{X_1 \in A_1\} \cap \{X_2 \in A_2\}) = \mathbb{P}(\{X_1 \in A_1\})\mathbb{P}(\{X_2 \in A_2\}), \quad \forall A_1, A_2.$$

#### PROBABILITES

##### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

##### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

##### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

##### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

#### STATISTIQUES

##### V – Estimateur ponctuel

##### VI – Intervalle de confiance

##### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test



### Définition : Variable aléatoire

Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace de probabilité. Une variable aléatoire  $X$  est une fonction définie sur  $\Omega$  et à valeurs dans un autre ensemble  $E$ .

Une variable aléatoire focalise sur un certain aspect de l'expérience aléatoire. Lorsque  $E$  est un ensemble fini ou dénombrable, on parle de v.a. discrètes.

### Exemples :

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$  et  $X(\omega) = \omega_1 + \omega_2$  (score lors d'un lancer de deux dés.)
- $\Omega =$  Jeu de cartes et  $X(\omega) =$  couleur de la carte.

### Définition : Indépendance de variables aléatoires

Deux variables aléatoires  $X_1, X_2$  définies sur un même espace de probabilité  $(\Omega, \mathbb{P})$  sont dites **indépendantes** si

$$\mathbb{P}(\{X_1 \in A_1\} \cap \{X_2 \in A_2\}) = \mathbb{P}(\{X_1 \in A_1\})\mathbb{P}(\{X_2 \in A_2\}), \quad \forall A_1, A_2.$$

Plus généralement, l'indépendance de  $n$  variables aléatoires s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{X_1 \in A_1\} \cap \{X_2 \in A_2\} \cap \cdots \cap \{X_n \in A_n\}) \\ = \mathbb{P}(\{X_1 \in A_1\})\mathbb{P}(\{X_2 \in A_2\}) \cdots \mathbb{P}(\{X_n \in A_n\}), \quad \forall A_1, A_2, \dots, A_n. \end{aligned}$$

### PROBABILITES

I – Modélisation d'une  
expérience aléatoire  
Espaces de probabilité

#### Schémas de Bernoulli

II – Loi des grands  
nombres

Intuition  
Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

III – Théorème de  
Moivre-Laplace

Commentaires  
Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

IV – Intervalle de  
fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

V – Estimateur  
ponctuel

VI – Intervalle de  
confiance

VII – Test d'hypothèse

Introduction  
Construction du test

On revient à l'espace  $\Omega = \{0, 1\}^n$  muni de la probabilité

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = p^{\text{Nombre de 1 dans } \omega} (1 - p)^{\text{Nombre de 0 dans } \omega}.$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

On revient à l'espace  $\Omega = \{0, 1\}^n$  muni de la probabilité

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = p^{\text{Nombre de 1 dans } \omega} (1 - p)^{\text{Nombre de 0 dans } \omega}.$$

- On définit sur cet espace les variables aléatoires  $X_i, i \in \{1, \dots, n\}$ , donnant le résultat de la  $i$ -ème épreuve :

$$\begin{array}{rcl} & \Omega & \rightarrow \{0, 1\} \\ X_i : & \omega & \mapsto \omega_i. \end{array}$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

On revient à l'espace  $\Omega = \{0, 1\}^n$  muni de la probabilité

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = p^{\text{Nombre de 1 dans } \omega} (1 - p)^{\text{Nombre de 0 dans } \omega}.$$

- On définit sur cet espace les variables aléatoires  $X_i, i \in \{1, \dots, n\}$ , donnant le résultat de la  $i$ -ème épreuve :

$$\begin{array}{rcl} \Omega & \rightarrow & \{0, 1\} \\ X_i : \omega & \mapsto & \omega_i. \end{array}$$

- Les variables aléatoires  $X_i$  sont **indépendantes** et suivent **une loi de Bernoulli de paramètre  $p$** , où  $p$  est la probabilité d'obtenir un Succès lors d'une épreuve.

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

On revient à l'espace  $\Omega = \{0, 1\}^n$  muni de la probabilité

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = p^{\text{Nombre de 1 dans } \omega} (1 - p)^{\text{Nombre de 0 dans } \omega}.$$

- On définit sur cet espace les variables aléatoires  $X_i, i \in \{1, \dots, n\}$ , donnant le résultat de la  $i$ -ème épreuve :

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \rightarrow & \{0, 1\} \\ X_i : \omega & \mapsto & \omega_i. \end{array}$$

- Les variables aléatoires  $X_i$  sont **indépendantes** et suivent **une loi de Bernoulli de paramètre  $p$** , où  $p$  est la probabilité d'obtenir un Succès lors d'une épreuve. (Dans le modèle de l'urne,  $p$  représente aussi la proportion de bons dans l'urne.)

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - p.$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

#### Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

On revient à l'espace  $\Omega = \{0, 1\}^n$  muni de la probabilité

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = p^{\text{Nombre de 1 dans } \omega} (1 - p)^{\text{Nombre de 0 dans } \omega}.$$

- On définit sur cet espace les variables aléatoires  $X_i, i \in \{1, \dots, n\}$ , donnant le résultat de la  $i$ -ème épreuve :

$$X_i : \Omega \rightarrow \{0, 1\} \\ \omega \mapsto \omega_i.$$

- Les variables aléatoires  $X_i$  sont **indépendantes** et suivent **une loi de Bernoulli de paramètre  $p$** , où  $p$  est la probabilité d'obtenir un Succès lors d'une épreuve. (Dans le modèle de l'urne,  $p$  représente aussi la proportion de bons dans l'urne.)

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - p.$$

- Le  $n$ -uplet

$$\omega = (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$$

est appelé **échantillon** de variables aléatoires de loi de Bernoulli de paramètre  $p$ .

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

#### Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

- Soit  $N_n$  le nombre de succès lors de l'expérience aléatoire,

$$N_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

- Soit  $N_n$  le nombre de succès lors de l'expérience aléatoire,

$$N_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

- La variable aléatoire  $N_n$  suit une **loi binômiale de paramètres  $n, p$** ,

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test



- Soit  $N_n$  le nombre de succès lors de l'expérience aléatoire,

$$N_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

- La variable aléatoire  $N_n$  suit une **loi binômiale de paramètres  $n, p$** ,

$$\mathbb{P}(N_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

- Soit  $N_n$  le nombre de succès lors de l'expérience aléatoire,

$$N_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

- La variable aléatoire  $N_n$  suit une **loi binômiale de paramètres  $n, p$** ,

$$\mathbb{P}(N_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

- La fréquence de Succès est  $F_n = N_n/n$ . Dans ce cas il s'agit aussi de la moyenne empirique de l'échantillon  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$

$$F_n = \frac{N_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \bar{X}.$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## II – Loi des grands nombres

### Intuition de la loi des grands nombres

#### PROBABILITES

##### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

##### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

##### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

##### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

#### STATISTIQUES

##### V – Estimateur ponctuel

##### VI – Intervalle de confiance

##### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## II – Loi des grands nombres

### Intuition de la loi des grands nombres

Reprenons le modèle de l'urne. Imaginons qu'elle contienne une proportion  $1/3$  de bonbons. Si on effectue un grand nombre  $n$  de tirages avec remise, alors on imagine que la fréquence  $F_n$  de succès obtenus, c'est à dire la fréquence de tirages d'un bonbon plutôt qu'un caillou, sera elle aussi proche de  $1/3$ .

Autrement dit, plus généralement, si  $p$  est la proportion de bonbons dans l'urne, c'est à dire la probabilité de Succès,

$$F_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p \quad !$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

##### Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires  
Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction  
Construction du test

## II – Loi des grands nombres

### Intuition de la loi des grands nombres

Reprenons le modèle de l'urne. Imaginons qu'elle contienne une proportion  $1/3$  de bonbons. Si on effectue un grand nombre  $n$  de tirages avec remise, alors on imagine que la fréquence  $F_n$  de succès obtenus, c'est à dire la fréquence de tirages d'un bonbon plutôt qu'un caillou, sera elle aussi proche de  $1/3$ .

Autrement dit, plus généralement, si  $p$  est la proportion de bonbons dans l'urne, c'est à dire la probabilité de Succès,

$$F_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p \quad !$$

**Question** : Soyons plus précis, de quel type de convergence s'agit-il ici ?

- En fait, dans un cadre mathématique rigoureux qui fait appel à la théorie de la mesure, on peut démontrer que

$$\mathbb{P} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n = p \right) = 1.$$

Ce résultat est connu sous le nom de loi forte des grands nombres.

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

##### Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## II – Loi des grands nombres

### Intuition de la loi des grands nombres

Reprenons le modèle de l'urne. Imaginons qu'elle contienne une proportion  $1/3$  de bonbons. Si on effectue un grand nombre  $n$  de tirages avec remise, alors on imagine que la fréquence  $F_n$  de succès obtenus, c'est à dire la fréquence de tirages d'un bonbon plutôt qu'un caillou, sera elle aussi proche de  $1/3$ .

Autrement dit, plus généralement, si  $p$  est la proportion de bonbons dans l'urne, c'est à dire la probabilité de Succès,

$$F_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p \quad !$$

**Question :** Soyons plus précis, de quel type de convergence s'agit-il ici ?

- En fait, dans un cadre mathématique rigoureux qui fait appel à la théorie de la mesure, on peut démontrer que

$$\mathbb{P} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n = p \right) = 1.$$

Ce résultat est connu sous le nom de loi forte des grands nombres.

- Nous allons nous contenter de démontrer la loi faible des grands nombres : pour tout  $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P} (|F_n - p| \leq \varepsilon) = \mathbb{P} (F_n \in [p - \varepsilon, p + \varepsilon]) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

##### Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires  
Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction  
Construction du test

La loi faible des grands nombres énoncée précédemment est une conséquence de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, qui est elle même une conséquence de l'inégalité de Markov.

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires  
Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction  
Construction du test

La loi faible des grands nombres énoncée précédemment est une conséquence de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, qui est elle même une conséquence de l'inégalité de Markov.

### Proposition : Inégalité de Markov

Soit  $Y$  une variable aléatoire discrète qui prend des valeurs strictement positives  $y_1, y_2, \dots, y_p$ , pour tout  $a > 0$ ,

$$\mathbb{P}(Y \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{a}.$$

#### PROBABILITES

##### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

##### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

##### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

##### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

#### STATISTIQUES

##### V – Estimateur ponctuel

##### VI – Intervalle de confiance

##### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test



## Vers la démonstration de la loi faible des grands nombres

La loi faible des grands nombres énoncée précédemment est une conséquence de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, qui est elle même une conséquence de l'inégalité de Markov.

### Proposition : Inégalité de Markov

Soit  $Y$  une variable aléatoire discrète qui prend des valeurs strictement positives  $y_1, y_2, \dots, y_p$ , pour tout  $a > 0$ ,

$$\mathbb{P}(Y \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{a}.$$

### Démonstration :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^p y_k \mathbb{P}(Y = y_k) \geq \sum_{y_k, y_k \geq a} y_k \mathbb{P}(Y = y_k)$$

#### PROBABILITES

##### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

##### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

##### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

##### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

#### STATISTIQUES

##### V – Estimateur ponctuel

##### VI – Intervalle de confiance

##### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

La loi faible des grands nombres énoncée précédemment est une conséquence de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, qui est elle même une conséquence de l'inégalité de Markov.

### Proposition : Inégalité de Markov

Soit  $Y$  une variable aléatoire discrète qui prend des valeurs strictement positives  $y_1, y_2, \dots, y_p$ , pour tout  $a > 0$ ,

$$\mathbb{P}(Y \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{a}.$$

### Démonstration :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=1}^p y_k \mathbb{P}(Y = y_k) \geq \sum_{y_k, y_k \geq a} y_k \mathbb{P}(Y = y_k) \\ &\geq a \left( \sum_{y_k, y_k \geq a} \mathbb{P}(Y = y_k) \right) \end{aligned}$$

#### PROBABILITES

##### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

##### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

##### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

##### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

#### STATISTIQUES

##### V – Estimateur ponctuel

##### VI – Intervalle de confiance

##### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

La loi faible des grands nombres énoncée précédemment est une conséquence de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, qui est elle même une conséquence de l'inégalité de Markov.

### Proposition : Inégalité de Markov

Soit  $Y$  une variable aléatoire discrète qui prend des valeurs strictement positives  $y_1, y_2, \dots, y_p$ , pour tout  $a > 0$ ,

$$\mathbb{P}(Y \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{a}.$$

### Démonstration :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=1}^p y_k \mathbb{P}(Y = y_k) \geq \sum_{y_k, y_k \geq a} y_k \mathbb{P}(Y = y_k) \\ &\geq a \left( \sum_{y_k, y_k \geq a} \mathbb{P}(Y = y_k) \right) = a \mathbb{P}(Y \geq a). \end{aligned}$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

#### Démonstration de la loi faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires  
Approximation de la loi binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction  
Construction du test

Soit  $Z$  une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs et  $\varepsilon > 0$ .

En choisissant

$$Y = (Z - \mathbb{E}(Z))^2, \quad a = \varepsilon^2,$$

on a  $\mathbb{E}(Y) = \text{Var}(Z)$  et

$$\mathbb{P}(Y \geq a) = \mathbb{P}((Z - \mathbb{E}(Z))^2 \geq \varepsilon^2) = \mathbb{P}(|Z - \mathbb{E}(Z)| \geq \varepsilon).$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit  $Z$  une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs et  $\varepsilon > 0$ .

En choisissant

$$Y = (Z - \mathbb{E}(Z))^2, \quad a = \varepsilon^2,$$

on a  $\mathbb{E}(Y) = \text{Var}(Z)$  et

$$\mathbb{P}(Y \geq a) = \mathbb{P}((Z - \mathbb{E}(Z))^2 \geq \varepsilon^2) = \mathbb{P}(|Z - \mathbb{E}(Z)| \geq \varepsilon).$$

L'inégalité de Markov donne ainsi l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

### Proposition : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Si  $Z$  est une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs, alors pour tout  $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|Z - \mathbb{E}(Z)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(Z)}{\varepsilon^2}.$$

#### PROBABILITES

I – Modélisation d'une  
expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

II – Loi des grands  
nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

III – Théorème de  
Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

IV – Intervalle de  
fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

#### STATISTIQUES

V – Estimateur  
ponctuel

VI – Intervalle de  
confiance

VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit  $Z$  une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs et  $\varepsilon > 0$ .

En choisissant

$$Y = (Z - \mathbb{E}(Z))^2, \quad a = \varepsilon^2,$$

on a  $\mathbb{E}(Y) = \text{Var}(Z)$  et

$$\mathbb{P}(Y \geq a) = \mathbb{P}((Z - \mathbb{E}(Z))^2 \geq \varepsilon^2) = \mathbb{P}(|Z - \mathbb{E}(Z)| \geq \varepsilon).$$

L'inégalité de Markov donne ainsi l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

### Proposition : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Si  $Z$  est une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs, alors pour tout  $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|Z - \mathbb{E}(Z)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(Z)}{\varepsilon^2}.$$

#### PROBABILITES

I – Modélisation d'une  
expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

II – Loi des grands  
nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

III – Théorème de  
Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

IV – Intervalle de  
fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

#### STATISTIQUES

V – Estimateur  
ponctuel

VI – Intervalle de  
confiance

VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## PROBABILITES

### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

## STATISTIQUES

### V – Estimateur ponctuel

### VI – Intervalle de confiance

### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Démonstration de la loi faible des grands nombres

La loi faible des grands nombres s'obtient en appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable aléatoire

$$Z = F_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}.$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test



## Démonstration de la loi faible des grands nombres

La loi faible des grands nombres s'obtient en appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable aléatoire

$$Z = F_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}.$$

On a alors par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i)}{n} = p,$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires  
Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction  
Construction du test

## Démonstration de la loi faible des grands nombres

La loi faible des grands nombres s'obtient en appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable aléatoire

$$Z = F_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}.$$

On a alors par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i)}{n} = p,$$

et puisque la variance est homogène d'ordre 2 et que les v. a.  $X_i$  sont indépendantes

$$\text{Var}(Z) = \frac{1}{n^2} \text{Var} \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = \frac{p(1-p)}{n}.$$

(Rappelons que la variance d'une loi de Bernoulli de paramètre  $p$  est  $p(1-p)$ .)

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Démonstration de la loi faible des grands nombres

La loi faible des grands nombres s'obtient en appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable aléatoire

$$Z = F_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}.$$

On a alors par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i)}{n} = p,$$

et puisque la variance est homogène d'ordre 2 et que les v. a.  $X_i$  sont indépendantes

$$\text{Var}(Z) = \frac{1}{n^2} \text{Var} \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = \frac{p(1-p)}{n}.$$

(Rappelons que la variance d'une loi de Bernoulli de paramètre  $p$  est  $p(1-p)$ .)  
 D'après Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbb{P}(|Z - \mathbb{E}(Z)| > \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(Z)}{\varepsilon^2},$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
 Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires  
 Approximation de la loi binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
 Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction  
 Construction du test

## Démonstration de la loi faible des grands nombres

La loi faible des grands nombres s'obtient en appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable aléatoire

$$Z = F_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}.$$

On a alors par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i)}{n} = p,$$

et puisque la variance est homogène d'ordre 2 et que les v. a.  $X_i$  sont indépendantes

$$\text{Var}(Z) = \frac{1}{n^2} \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = \frac{p(1-p)}{n}.$$

(Rappelons que la variance d'une loi de Bernoulli de paramètre  $p$  est  $p(1-p)$ .)  
 D'après Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbb{P}(|Z - \mathbb{E}(Z)| > \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(Z)}{\varepsilon^2},$$

c'est à dire

$$\mathbb{P}(|F_n - p| > \varepsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
 Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires  
 Approximation de la loi binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
 Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction  
 Construction du test

## PROBABILITES

 I – Modélisation d'une  
 expérience aléatoire

 Espaces de probabilité  
 Schémas de Bernoulli

 II – Loi des grands  
 nombres

Intuition

 Démonstration de la loi  
 faible des grands nombres

 III – Théorème de  
 Moivre-Laplace

 Commentaires  
 Approximation de la loi  
 binomiale par la loi normale

 IV – Intervalle de  
 fluctuation

 Fluctuation d'échantillons  
 Fluctuation de la fréquence

## STATISTIQUES

 V – Estimateur  
 ponctuel

 VI – Intervalle de  
 confiance

VII – Test d'hypothèse

 Introduction  
 Construction du test

## Démonstration de la loi faible des grands nombres

La loi faible des grands nombres s'obtient en appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable aléatoire

$$Z = F_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}.$$

On a alors par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i)}{n} = p,$$

et puisque la variance est homogène d'ordre 2 et que les v. a.  $X_i$  sont indépendantes

$$\text{Var}(Z) = \frac{1}{n^2} \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = \frac{p(1-p)}{n}.$$

(Rappelons que la variance d'une loi de Bernoulli de paramètre  $p$  est  $p(1-p)$ .)  
 D'après Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbb{P}(|Z - \mathbb{E}(Z)| > \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(Z)}{\varepsilon^2},$$

c'est à dire

$$\mathbb{P}(|F_n - p| > \varepsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

donc

$$\mathbb{P}(|F_n - p| \leq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

## PROBABILITES

 I – Modélisation d'une  
 expérience aléatoire

 Espaces de probabilité  
 Schémas de Bernoulli

 II – Loi des grands  
 nombres

Intuition

 Démonstration de la loi  
 faible des grands nombres

 III – Théorème de  
 Moivre-Laplace

 Commentaires  
 Approximation de la loi  
 binomiale par la loi normale

 IV – Intervalle de  
 fluctuation

 Fluctuation d'échantillons  
 Fluctuation de la fréquence

## STATISTIQUES

 V – Estimateur  
 ponctuel

 VI – Intervalle de  
 confiance

VII – Test d'hypothèse

 Introduction  
 Construction du test

## Démonstration de la loi faible des grands nombres

La loi faible des grands nombres s'obtient en appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable aléatoire

$$Z = F_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}.$$

On a alors par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i)}{n} = p,$$

et puisque la variance est homogène d'ordre 2 et que les v. a.  $X_i$  sont indépendantes

$$\text{Var}(Z) = \frac{1}{n^2} \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = \frac{p(1-p)}{n}.$$

(Rappelons que la variance d'une loi de Bernoulli de paramètre  $p$  est  $p(1-p)$ .)  
 D'après Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbb{P}(|Z - \mathbb{E}(Z)| > \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(Z)}{\varepsilon^2},$$

c'est à dire

$$\mathbb{P}(|F_n - p| > \varepsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

donc

$$\mathbb{P}(|F_n - p| \leq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

La loi faible des grands nombres est donc une conséquence du fait que la variance de  $F_n$  décroît en  $1/n$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.

Plus généralement,

### Théorème : Loi forte des grands nombres

Si  $X_1, X_2, \dots$  est une suite de variables aléatoires à valeurs réelles indépendantes et de même loi telles que  $\mathbb{E}[|X_1|] < +\infty$ , alors en notant  $m = \mathbb{E}[X_1]$

$$\mathbb{P} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = m \right) = 1$$

#### PROBABILITES

I – Modélisation d'une  
expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

II – Loi des grands  
nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

III – Théorème de  
Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

IV – Intervalle de  
fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

#### STATISTIQUES

V – Estimateur  
ponctuel

VI – Intervalle de  
confiance

VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Énoncé général de la loi des grands nombres

Plus généralement,

### Théorème : Loi forte des grands nombres

Si  $X_1, X_2, \dots$  est une suite de variables aléatoires à valeurs réelles indépendantes et de même loi telles que  $\mathbb{E}[|X_1|] < +\infty$ , alors en notant  $m = \mathbb{E}[X_1]$

$$\mathbb{P} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = m \right) = 1$$

### Théorème : Loi faible des grands nombres

Si  $X_1, X_2, \dots$  est une suite de variables aléatoires à valeurs réelles indépendantes et de même loi telles que  $\mathbb{E}[|X_1|^2] < +\infty$ , alors en notant  $m = \mathbb{E}[X_1]$ , pour tout  $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P} \left( \left| \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - m \right| \leq \varepsilon \right) \rightarrow 1 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

#### PROBABILITES

I – Modélisation d'une  
expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

II – Loi des grands  
nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

III – Théorème de  
Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

IV – Intervalle de  
fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

#### STATISTIQUES

V – Estimateur  
ponctuel

VI – Intervalle de  
confiance

VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test



## Énoncé général de la loi des grands nombres

Plus généralement,

### Théorème : Loi forte des grands nombres

Si  $X_1, X_2, \dots$  est une suite de variables aléatoires à valeurs réelles indépendantes et de même loi telles que  $\mathbb{E}[|X_1|] < +\infty$ , alors en notant  $m = \mathbb{E}[X_1]$

$$\mathbb{P} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = m \right) = 1$$

### Théorème : Loi faible des grands nombres

Si  $X_1, X_2, \dots$  est une suite de variables aléatoires à valeurs réelles indépendantes et de même loi telles que  $\mathbb{E}[|X_1|^2] < +\infty$ , alors en notant  $m = \mathbb{E}[X_1]$ , pour tout  $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P} \left( \left| \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - m \right| \leq \varepsilon \right) \rightarrow 1 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Si les variables sont discrètes la preuve précédente de la loi faible s'adapte immédiatement.

#### PROBABILITES

I – Modélisation d'une  
expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

II – Loi des grands  
nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

III – Théorème de  
Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

IV – Intervalle de  
fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

#### STATISTIQUES

V – Estimateur  
ponctuel

VI – Intervalle de  
confiance

VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

### Définition : Variable à densité

Soit  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction continue par morceaux telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx = 1.$$

On dit qu'une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  a pour densité  $h$  si pour tout  $a < b$  on a

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b h(x) dx.$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires  
Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction  
Construction du test

### Définition : Variable à densité

Soit  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction continue par morceaux telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx = 1.$$

On dit qu'une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  a pour densité  $h$  si pour tout  $a < b$  on a

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b h(x) dx.$$

### Exemples :

- Loi uniforme  $\mathcal{U}[a, b] : h(x) = \frac{1}{b-a}$  si  $x \in [a, b]$  et  $h(x) = 0$  sinon.

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires  
Approximation de la loi binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction  
Construction du test

### Définition : Variable à densité

Soit  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction continue par morceaux telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx = 1.$$

On dit qu'une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  a pour densité  $h$  si pour tout  $a < b$  on a

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b h(x) dx.$$

### Exemples :

- Loi uniforme  $\mathcal{U}[a, b]$  :  $h(x) = \frac{1}{b-a}$  si  $x \in [a, b]$  et  $h(x) = 0$  sinon.
- Loi normale  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$  :

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

### Définition : Variable à densité

Soit  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction continue par morceaux telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx = 1.$$

On dit qu'une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  a pour densité  $h$  si pour tout  $a < b$  on a

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b h(x) dx.$$

### Exemples :

- Loi uniforme  $\mathcal{U}[a, b]$  :  $h(x) = \frac{1}{b-a}$  si  $x \in [a, b]$  et  $h(x) = 0$  sinon.
- Loi normale  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$  :

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

- Loi exponentielle  $\mathcal{E}(\lambda)$  :  $h(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ , si  $x \geq 0$  et  $h(x) = 0$  sinon.

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires  
Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction  
Construction du test

Si  $X$  a une densité  $h$  telle que  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|h(x) dx < +\infty$ , on pose

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xh(x) dx$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

Si  $X$  a une densité  $h$  telle que  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|h(x) dx < +\infty$ , on pose

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xh(x) dx$$

et si  $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 h(x) dx < \infty$ , on pose

$$\mathbb{E}[X^2] = \int x^2 h(x) dx \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires  
Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction  
Construction du test

Si  $X$  a une densité  $h$  telle que  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|h(x) dx < +\infty$ , on pose

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xh(x) dx$$

et si  $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 h(x) dx < \infty$ , on pose

$$\mathbb{E}[X^2] = \int x^2 h(x) dx \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev reste valable pour les variables aléatoires à densité ainsi que la preuve de la loi faible des grands nombres.

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test



Si  $X$  a une densité  $h$  telle que  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|h(x) dx < +\infty$ , on pose

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xh(x) dx$$

et si  $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 h(x) dx < \infty$ , on pose

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 h(x) dx \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev reste valable pour les variables aléatoires à densité ainsi que la preuve de la loi faible des grands nombres.

Exemples :

- Si  $X \sim \mathcal{U}[a, b]$ ,  $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$  et  $\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$ .
- Si  $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ ,  $\mathbb{E}[X] = m$ ,  $\text{Var}(X) = \sigma^2$ .
- Si  $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ ,  $\mathbb{E}[X] = 1/\lambda$ ,  $\text{Var}(X) = 1/\lambda^2$ .

### PROBABILITES

I – Modélisation d'une  
expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

II – Loi des grands  
nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

III – Théorème de  
Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

IV – Intervalle de  
fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

V – Estimateur  
ponctuel

VI – Intervalle de  
confiance

VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

### III – Théorème de Moivre-Laplace

Le nombre de succès  $N_n$  lors des  $n$  épreuves identiques successives suit une loi binomiale  $B(n, p)$ .

#### PROBABILITES

##### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

##### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

##### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

##### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

#### STATISTIQUES

##### V – Estimateur ponctuel

##### VI – Intervalle de confiance

##### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

### III – Théorème de Moivre-Laplace

Le nombre de succès  $N_n$  lors des  $n$  épreuves identiques successives suit une loi binomiale  $B(n, p)$ .

On observe le phénomène suivant, lorsqu'on centre puis qu'on renormalise le nombre de succès  $N_n$ , la loi de la variable  $Z_n$  ainsi obtenue est proche de la loi d'une variable aléatoire  $Z$  normale centrée réduite lorsque  $n$  est grand.

#### PROBABILITES

##### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

##### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

##### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

##### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

#### STATISTIQUES

##### V – Estimateur ponctuel

##### VI – Intervalle de confiance

##### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

### III – Théorème de Moivre-Laplace

Le nombre de succès  $N_n$  lors des  $n$  épreuves identiques successives suit une loi binomiale  $B(n, p)$ .

On observe le phénomène suivant, lorsqu'on centre puis qu'on renormalise le nombre de succès  $N_n$ , la loi de la variable  $Z_n$  ainsi obtenue est proche de la loi d'une variable aléatoire  $Z$  normale centrée réduite lorsque  $n$  est grand.

$$N_n \xrightarrow{\text{centrage}} N_n - \mathbb{E}(N_n) \xrightarrow{\text{renormalisation}} Z_n = \frac{N_n - \mathbb{E}(N_n)}{\sqrt{\text{Var}(N_n)}} = \frac{N_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{F_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}.$$

#### PROBABILITES

##### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

##### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

##### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

#### STATISTIQUES

##### V – Estimateur ponctuel

##### VI – Intervalle de confiance

##### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

### III – Théorème de Moivre-Laplace

Le nombre de succès  $N_n$  lors des  $n$  épreuves identiques successives suit une loi binomiale  $B(n, p)$ .

On observe le phénomène suivant, lorsqu'on centre puis qu'on renormalise le nombre de succès  $N_n$ , la loi de la variable  $Z_n$  ainsi obtenue est proche de la loi d'une variable aléatoire  $Z$  normale centrée réduite lorsque  $n$  est grand.

$$N_n \xrightarrow{\text{centrage}} N_n - \mathbb{E}(N_n) \xrightarrow{\text{renormalisation}} Z_n = \frac{N_n - \mathbb{E}(N_n)}{\sqrt{\text{Var}(N_n)}} = \frac{N_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{F_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}.$$

#### Théorème de Moivre-Laplace

Pour toutes valeurs réelles  $a < b$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(a \leq Z_n \leq b) = \mathbb{P}(a \leq Z \leq b) = \int_a^b e^{-t^2/2} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}}.$$

Ce résultat est connu sous le nom de Théorème de Moivre-Laplace, c'est un cas particulier du théorème de la limite centrale.

Simulations, observations : [TestCabri2](#)

#### PROBABILITES

##### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

##### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

##### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

#### STATISTIQUES

##### V – Estimateur ponctuel

##### VI – Intervalle de confiance

##### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Théorème de la limite centrale

### Théorème de la limite centrale

Soit  $X_1, X_2, \dots$  une suite de v.a. indépendantes et de même loi telle que  $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$ . Posons  $m = \mathbb{E}[X_1]$ ,  $\sigma^2 = \text{Var}(X_1)$  et

$$Z_n = \frac{X_1 + \dots + X_n - nm}{\sqrt{n}\sigma}.$$

Pour tous  $a < b$ ,

$$\mathbb{P}(a \leq Z_n \leq b) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx,$$

lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

### Remarque :

Si on pose

$$\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \quad (\text{moyenne empirique de l'échantillon}),$$

alors

$$Z_n = \frac{\bar{X} - \mathbb{E}[\bar{X}]}{\sqrt{\text{Var}(\bar{X})}}.$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition  
Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires  
Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction  
Construction du test

## Quelle information apporte le Théorème de Moivre-Laplace ?

La loi normale centrée réduite est une loi concentrée entre les valeurs -4 et 4, en effet

$$\mathbb{P}(-3,6 \leq Z \leq 3,6) \geq 0.9996.$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition  
Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

##### Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction  
Construction du test

## Quelle information apporte le Théorème de Moivre-Laplace ?

La loi normale centrée réduite est une loi concentrée entre les valeurs -4 et 4, en effet

$$\mathbb{P}(-3,6 \leq Z \leq 3,6) \geq 0.9996.$$

En conséquence, d'après le théorème de Moivre-Laplace, il en est de même pour  $Z_n$  lorsque  $n$  est grand. Avec grande probabilité,

$$-3,6 \leq \frac{F_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq 3,6,$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition  
Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

##### Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction  
Construction du test



## Quelle information apporte le Théorème de Moivre-Laplace ?

La loi normale centrée réduite est une loi concentrée entre les valeurs -4 et 4, en effet

$$\mathbb{P}(-3,6 \leq Z \leq 3,6) \geq 0.9996.$$

En conséquence, d'après le théorème de Moivre-Laplace, il en est de même pour  $Z_n$  lorsque  $n$  est grand. Avec grande probabilité,

$$-3,6 \leq \frac{F_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq 3,6,$$

c'est à dire,

$$|F_n - p| \leq \frac{3,6 \sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{1,8}{\sqrt{n}}.$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition  
Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

##### Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction  
Construction du test

## Quelle information apporte le Théorème de Moivre-Laplace ?

La loi normale centrée réduite est une loi concentrée entre les valeurs -4 et 4, en effet

$$\mathbb{P}(-3,6 \leq Z \leq 3,6) \geq 0.9996.$$

En conséquence, d'après le théorème de Moivre-Laplace, il en est de même pour  $Z_n$  lorsque  $n$  est grand. Avec grande probabilité,

$$-3,6 \leq \frac{F_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq 3,6,$$

c'est à dire,

$$|F_n - p| \leq \frac{3,6\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{1,8}{\sqrt{n}}.$$

Cette inégalité montre qu'avec grande probabilité  $F_n$  tend vers  $p$  avec une vitesse de l'ordre de  $1,8/\sqrt{n}$ . Le Théorème de Moivre-Laplace donne donc une vitesse de convergence en  $1/\sqrt{n}$  dans la loi faible des grands nombres.

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition  
Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

##### Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction  
Construction du test

## Quelle information apporte le Théorème de Moivre-Laplace ?

La loi normale centrée réduite est une loi concentrée entre les valeurs -4 et 4, en effet

$$\mathbb{P}(-3,6 \leq Z \leq 3,6) \geq 0.9996.$$

En conséquence, d'après le théorème de Moivre-Laplace, il en est de même pour  $Z_n$  lorsque  $n$  est grand. Avec grande probabilité,

$$-3,6 \leq \frac{F_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq 3,6,$$

c'est à dire,

$$|F_n - p| \leq \frac{3,6\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{1,8}{\sqrt{n}}.$$

Cette inégalité montre qu'avec grande probabilité  $F_n$  tend vers  $p$  avec une vitesse de l'ordre de  $1,8/\sqrt{n}$ . Le Théorème de Moivre-Laplace donne donc une vitesse de convergence en  $1/\sqrt{n}$  dans la loi faible des grands nombres.

Cette information est cruciale, elle va permettre de construire des **intervalles de fluctuation** de la fréquence observée  $F_n$  lorsque  $n$  est grand.

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition  
Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

##### Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction  
Construction du test

## Approximation de la loi Binomiale par la loi normale

Notons  $m_n = \mathbb{E}(N_n) = np$  et  $\sigma_n^2 = \text{Var}(N_n) = np(1 - p)$ , on a alors

$$Z_n = \frac{N_n - m_n}{\sigma_n}.$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition  
Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction  
Construction du test

## Approximation de la loi Binomiale par la loi normale

Notons  $m_n = \mathbb{E}(N_n) = np$  et  $\sigma_n^2 = \text{Var}(N_n) = np(1 - p)$ , on a alors

$$Z_n = \frac{N_n - m_n}{\sigma_n}.$$

Le Théorème de Moivre-Laplace indique que pour tous réels  $a < b$

$$\mathbb{P}\left(a \leq \frac{N_n - m_n}{\sigma_n} \leq b\right) = \mathbb{P}(a \leq Z_n \leq b) \simeq \mathbb{P}(a \leq Z \leq b).$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition  
Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction  
Construction du test

## Approximation de la loi Binomiale par la loi normale

Notons  $m_n = \mathbb{E}(N_n) = np$  et  $\sigma_n^2 = \text{Var}(N_n) = np(1 - p)$ , on a alors

$$Z_n = \frac{N_n - m_n}{\sigma_n}.$$

Le Théorème de Moivre-Laplace indique que pour tous réels  $a < b$

$$\mathbb{P}\left(a \leq \frac{N_n - m_n}{\sigma_n} \leq b\right) = \mathbb{P}(a \leq Z_n \leq b) \simeq \mathbb{P}(a \leq Z \leq b).$$

Autrement dit

$$\mathbb{P}(\sigma_n a + m_n \leq N_n \leq \sigma_n b + m_n) \simeq \mathbb{P}(\sigma_n a + m_n \leq \sigma_n Z + m_n \leq \sigma_n b + m_n).$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition  
Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction  
Construction du test

## Approximation de la loi Binomiale par la loi normale

Notons  $m_n = \mathbb{E}(N_n) = np$  et  $\sigma_n^2 = \text{Var}(N_n) = np(1 - p)$ , on a alors

$$Z_n = \frac{N_n - m_n}{\sigma_n}.$$

Le Théorème de Moivre-Laplace indique que pour tous réels  $a < b$

$$\mathbb{P}\left(a \leq \frac{N_n - m_n}{\sigma_n} \leq b\right) = \mathbb{P}(a \leq Z_n \leq b) \simeq \mathbb{P}(a \leq Z \leq b).$$

Autrement dit

$$\mathbb{P}(\sigma_n a + m_n \leq N_n \leq \sigma_n b + m_n) \simeq \mathbb{P}(\sigma_n a + m_n \leq \sigma_n Z + m_n \leq \sigma_n b + m_n).$$

En posant  $a' = \sigma_n a + m_n$  et  $b' = \sigma_n b + m_n$ , on obtient pour tous réels  $a' < b'$ ,

$$\mathbb{P}(a' \leq N_n \leq b') \simeq \mathbb{P}(a' \leq \sigma_n Z + m_n \leq b').$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Approximation de la loi Binomiale par la loi normale

Notons  $m_n = \mathbb{E}(N_n) = np$  et  $\sigma_n^2 = \text{Var}(N_n) = np(1 - p)$ , on a alors

$$Z_n = \frac{N_n - m_n}{\sigma_n}.$$

Le Théorème de Moivre-Laplace indique que pour tous réels  $a < b$

$$\mathbb{P}\left(a \leq \frac{N_n - m_n}{\sigma_n} \leq b\right) = \mathbb{P}(a \leq Z_n \leq b) \simeq \mathbb{P}(a \leq Z \leq b).$$

Autrement dit

$$\mathbb{P}(\sigma_n a + m_n \leq N_n \leq \sigma_n b + m_n) \simeq \mathbb{P}(\sigma_n a + m_n \leq \sigma_n Z + m_n \leq \sigma_n b + m_n).$$

En posant  $a' = \sigma_n a + m_n$  et  $b' = \sigma_n b + m_n$ , on obtient pour tous réels  $a' < b'$ ,

$$\mathbb{P}(a' \leq N_n \leq b') \simeq \mathbb{P}(a' \leq \sigma_n Z + m_n \leq b').$$

Cette égalité signifie que la loi binomiale  $B(n, p)$  de  $N_n$  est proche de la loi de  $\sigma_n Z + m_n$ , qui est la loi normale de moyenne  $m_n = \mathbb{E}(N_n)$  et de variance  $\sigma_n^2 = \text{Var}(N_n)$ . En effet, on a le résultat suivant,

### Lemme

Si  $Z$  suit une loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$  alors  $\sigma Z + m$  suit la loi normale  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ .

### PROBABILITES

I – Modélisation d'une  
expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

II – Loi des grands  
nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

III – Théorème de  
Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

IV – Intervalle de  
fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

V – Estimateur  
ponctuel

VI – Intervalle de  
confiance

VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test



## Approximation de la loi Binomiale par la loi normale

Notons  $m_n = \mathbb{E}(N_n) = np$  et  $\sigma_n^2 = \text{Var}(N_n) = np(1 - p)$ , on a alors

$$Z_n = \frac{N_n - m_n}{\sigma_n}.$$

Le Théorème de Moivre-Laplace indique que pour pour tous réels  $a < b$

$$\mathbb{P}\left(a \leq \frac{N_n - m_n}{\sigma_n} \leq b\right) = \mathbb{P}(a \leq Z_n \leq b) \simeq \mathbb{P}(a \leq Z \leq b).$$

Autrement dit

$$\mathbb{P}(\sigma_n a + m_n \leq N_n \leq \sigma_n b + m_n) \simeq \mathbb{P}(\sigma_n a + m_n \leq \sigma_n Z + m_n \leq \sigma_n b + m_n).$$

En posant  $a' = \sigma_n a + m_n$  et  $b' = \sigma_n b + m_n$ , on obtient pour tous réels  $a' < b'$ ,

$$\mathbb{P}(a' \leq N_n \leq b') \simeq \mathbb{P}(a' \leq \sigma_n Z + m_n \leq b').$$

Cette égalité signifie que la loi binomiale  $B(n, p)$  de  $N_n$  est proche de la loi de  $\sigma_n Z + m_n$ , qui est la loi normale de moyenne  $m_n = \mathbb{E}(N_n)$  et de variance  $\sigma_n^2 = \text{Var}(N_n)$ . En effet, on a le résultat suivant,

### Lemme

Si  $Z$  suit une loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$  alors  $\sigma Z + m$  suit la loi normale  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ .

On obtient ainsi le résultat suivant.

### Approximation de la loi binomiale par la loi normale.

Lorsque  $n$  est grand, la loi binomiale  $B(n, p)$  est proche de la loi normale  $\mathcal{N}(np, np(1 - p))$ .

## PROBABILITES

### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

### II – Loi des grands nombres

Intuition  
Démonstration de la loi faible des grands nombres

### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi binomiale par la loi normale

### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
Fluctuation de la fréquence

## STATISTIQUES

### V – Estimateur ponctuel

### VI – Intervalle de confiance

### VII – Test d'hypothèse

Introduction  
Construction du test

## IV – Intervalle de fluctuation de la fréquence de succès $F_n$

En pratique, un même schéma de Bernoulli répété deux fois de suite donne, au gré du hasard, deux résultats différents  $\omega$  et  $\omega'$ , c'est à dire deux échantillons différents dans  $\{0, 1\}^n$ ,

$$\omega = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \quad \text{et} \quad \omega' = (X_1(\omega'), \dots, X_n(\omega')).$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition  
Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires  
Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

#### Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction  
Construction du test

## IV – Intervalle de fluctuation de la fréquence de succès $F_n$

En pratique, un même schéma de Bernoulli répété deux fois de suite donne, au gré du hasard, deux résultats différents  $\omega$  et  $\omega'$ , c'est à dire deux échantillons différents dans  $\{0, 1\}^n$ ,

$$\omega = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \quad \text{et} \quad \omega' = (X_1(\omega'), \dots, X_n(\omega')).$$

En fait, chaque simulation du schéma de Bernoulli produit un nouvel échantillon, c'est le phénomène de **fluctuation des échantillons**. Par suite, la fréquence observée  $F_n(\omega)$  **fluctue** elle aussi en fonction de l'échantillon  $\omega$ .

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

##### Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## IV – Intervalle de fluctuation de la fréquence de succès $F_n$

En pratique, un même schéma de Bernoulli répété deux fois de suite donne, au gré du hasard, deux résultats différents  $\omega$  et  $\omega'$ , c'est à dire deux échantillons différents dans  $\{0, 1\}^n$ ,

$$\omega = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \quad \text{et} \quad \omega' = (X_1(\omega'), \dots, X_n(\omega')).$$

En fait, chaque simulation du schéma de Bernoulli produit un nouvel échantillon, c'est le phénomène de **fluctuation des échantillons**. Par suite, la fréquence observée  $F_n(\omega)$  **fluctue** elle aussi en fonction de l'échantillon  $\omega$ .

Cependant, puisque la loi forte des grands nombres indique que

$$\mathbb{P} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n = p \right) = 1,$$

les fluctuations de  $F_n(\omega)$  tournent autour de  $p$ , si  $n$  a été choisi suffisamment grand.

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Intervalle de fluctuation de la fréquence de succès.

Imaginons que la probabilité de succès  $p$  à chaque épreuve soit connue (par exemple  $p = 1/4$ ).

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition  
Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires  
Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction  
Construction du test

## Intervalle de fluctuation de la fréquence de succès.

Imaginons que la probabilité de succès  $p$  à chaque épreuve soit connue (par exemple  $p = 1/4$ ).

Pour préciser l'idée précédente, considérons un intervalle centré en  $p$ ,

$$I = [p - \varepsilon, p + \varepsilon]$$

(par exemple  $I = [0, 24; 0, 26]$  pour  $\varepsilon = 0, 01$ ).

Nous pouvons vérifier que

$\mathbb{P}(F_n \in I)$  est proche de 1 pour  $n$  suffisamment grand.

L'intervalle  $I$  est appelé **intervalle de fluctuation** de la fréquence  $F_n$ .

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition  
Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires  
Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction  
Construction du test

## Intervalle de fluctuation de la fréquence de succès.

Imaginons que la probabilité de succès  $p$  à chaque épreuve soit connue (par exemple  $p = 1/4$ ).

Pour préciser l'idée précédente, considérons un intervalle centré en  $p$ ,

$$I = [p - \varepsilon, p + \varepsilon]$$

(par exemple  $I = [0, 24; 0, 26]$  pour  $\varepsilon = 0, 01$ ).

Nous pouvons vérifier que

$\mathbb{P}(F_n \in I)$  est proche de 1 pour  $n$  suffisamment grand.

L'intervalle  $I$  est appelé **intervalle de fluctuation** de la fréquence  $F_n$ .

**1ère méthode.**

**Calcul exact** de  $\mathbb{P}(F_n \in I)$  lorsque  $p, \varepsilon, n$  sont connus à l'aide d'un **tableur**.

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Intervalle de fluctuation de la fréquence de succès.

Imaginons que la probabilité de succès  $p$  à chaque épreuve soit connue (par exemple  $p = 1/4$ ).

Pour préciser l'idée précédente, considérons un intervalle centré en  $p$ ,

$$I = [p - \varepsilon, p + \varepsilon]$$

(par exemple  $I = [0, 24; 0, 26]$  pour  $\varepsilon = 0, 01$ ).

Nous pouvons vérifier que

$\mathbb{P}(F_n \in I)$  est proche de 1 pour  $n$  suffisamment grand.

L'intervalle  $I$  est appelé **intervalle de fluctuation** de la fréquence  $F_n$ .

**1ère méthode.**

**Calcul exact** de  $\mathbb{P}(F_n \in I)$  lorsque  $p, \varepsilon, n$  sont connus à l'aide d'un **tableur**.

$$\mathbb{P}(F_n \in I) = \mathbb{P}(N_n \in [n(p - \varepsilon), n(p + \varepsilon)]) =$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition  
Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires  
Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction  
Construction du test



## Intervalle de fluctuation de la fréquence de succès.

Imaginons que la probabilité de succès  $p$  à chaque épreuve soit connue (par exemple  $p = 1/4$ ).

Pour préciser l'idée précédente, considérons un intervalle centré en  $p$ ,

$$I = [p - \varepsilon, p + \varepsilon]$$

(par exemple  $I = [0, 24; 0, 26]$  pour  $\varepsilon = 0, 01$ ).

Nous pouvons vérifier que

$\mathbb{P}(F_n \in I)$  est proche de 1 pour  $n$  suffisamment grand.

L'intervalle  $I$  est appelé **intervalle de fluctuation** de la fréquence  $F_n$ .

**1ère méthode.**

**Calcul exact** de  $\mathbb{P}(F_n \in I)$  lorsque  $p, \varepsilon, n$  sont connus à l'aide d'un **tableur**.

$$\mathbb{P}(F_n \in I) = \mathbb{P}(N_n \in [n(p - \varepsilon), n(p + \varepsilon)]) = \sum_{k, n(p - \varepsilon) \leq k \leq n(p + \varepsilon)} \mathbb{P}(N_n = k),$$

avec  $\mathbb{P}(N_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ .

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

# Intervalle de fluctuation de la fréquence de succès.

2ème méthode.

Minoration de  $\mathbb{P}(F_n \in I)$  grâce à l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev.

## PROBABILITES

### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

### II – Loi des grands nombres

Intuition  
Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires  
Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

## STATISTIQUES

### V – Estimateur ponctuel

### VI – Intervalle de confiance

### VII – Test d'hypothèse

Introduction  
Construction du test

2ème méthode.

Minoration de  $\mathbb{P}(F_n \in I)$  grâce à l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev.

$$\mathbb{P}(F_n \in I) = \mathbb{P}(|N_n - np| \leq n\varepsilon) =$$

## PROBABILITES

I – Modélisation d'une  
expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

II – Loi des grands  
nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

III – Théorème de  
Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

IV – Intervalle de  
fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

## STATISTIQUES

V – Estimateur  
ponctuel

VI – Intervalle de  
confiance

VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

2ème méthode.

Minoration de  $\mathbb{P}(F_n \in I)$  grâce à l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F_n \in I) &= \mathbb{P}(|N_n - np| \leq n\varepsilon) = \mathbb{P}(|N_n - \mathbb{E}(N_n)| \leq n\varepsilon) \\ &= 1 - \mathbb{P}(|N_n - \mathbb{E}(N_n)| > n\varepsilon)\end{aligned}$$

### PROBABILITES

I – Modélisation d'une  
expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

II – Loi des grands  
nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

III – Théorème de  
Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

IV – Intervalle de  
fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

V – Estimateur  
ponctuel

VI – Intervalle de  
confiance

VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## 2ème méthode.

Minoration de  $\mathbb{P}(F_n \in I)$  grâce à l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F_n \in I) &= \mathbb{P}(|N_n - np| \leq n\varepsilon) = \mathbb{P}(|N_n - \mathbb{E}(N_n)| \leq n\varepsilon) \\ &= 1 - \mathbb{P}(|N_n - \mathbb{E}(N_n)| > n\varepsilon) \\ &\geq 1 - \frac{\text{Var}(N_n)}{n^2\varepsilon^2}\end{aligned}$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

### 2ème méthode.

Minoration de  $\mathbb{P}(F_n \in I)$  grâce à l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F_n \in I) &= \mathbb{P}(|N_n - np| \leq n\varepsilon) = \mathbb{P}(|N_n - \mathbb{E}(N_n)| \leq n\varepsilon) \\ &= 1 - \mathbb{P}(|N_n - \mathbb{E}(N_n)| > n\varepsilon) \\ &\geq 1 - \frac{\text{Var}(N_n)}{n^2\varepsilon^2} = 1 - \frac{\rho(1 - \rho)}{n\varepsilon^2},\end{aligned}$$

car  $\text{Var}(N_n) = np(1 - p)$ .

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## 3ème méthode.

Estimation de  $\mathbb{P}(F_n \in I)$  grâce au Théorème de Moivre-Laplace.

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

### 3ème méthode.

Estimation de  $\mathbb{P}(F_n \in I)$  grâce au **Théorème de Moivre-Laplace**.

Rappelons que  $Z_n = \frac{N_n - np}{\sigma_n}$ , avec  $\sigma_n^2 = np(1 - p)$ ,

#### PROBABILITES

##### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

##### II – Loi des grands nombres

Intuition  
Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

##### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires  
Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

##### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

#### STATISTIQUES

##### V – Estimateur ponctuel

##### VI – Intervalle de confiance

##### VII – Test d'hypothèse

Introduction  
Construction du test



### 3ème méthode.

Estimation de  $\mathbb{P}(F_n \in I)$  grâce au **Théorème de Moivre-Laplace**.

Rappelons que  $Z_n = \frac{N_n - np}{\sigma_n}$ , avec  $\sigma_n^2 = np(1 - p)$ ,

$$\mathbb{P}(F_n \in I) = \mathbb{P}(|N_n - np| \leq n\varepsilon) = \mathbb{P}\left(|Z_n| \leq \frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{p(1-p)}}\right)$$

#### PROBABILITES

##### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

##### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

##### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

##### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

#### STATISTIQUES

##### V – Estimateur ponctuel

##### VI – Intervalle de confiance

##### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

### 3ème méthode.

Estimation de  $\mathbb{P}(F_n \in I)$  grâce au **Théorème de Moivre-Laplace**.

Rappelons que  $Z_n = \frac{N_n - np}{\sigma_n}$ , avec  $\sigma_n^2 = np(1 - p)$ ,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F_n \in I) &= \mathbb{P}(|N_n - np| \leq n\varepsilon) = \mathbb{P}\left(|Z_n| \leq \frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \\ &\simeq \mathbb{P}\left(|Z| \leq \frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \\ &= \int_{-\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{p(1-p)}}}^{\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{p(1-p)}}} e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\end{aligned}$$

#### PROBABILITES

##### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

##### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

##### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

##### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

#### STATISTIQUES

##### V – Estimateur ponctuel

##### VI – Intervalle de confiance

##### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

### 3ème méthode.

Estimation de  $\mathbb{P}(F_n \in I)$  grâce au **Théorème de Moivre-Laplace**.

Rappelons que  $Z_n = \frac{N_n - np}{\sigma_n}$ , avec  $\sigma_n^2 = np(1-p)$ ,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F_n \in I) &= \mathbb{P}(|N_n - np| \leq n\varepsilon) = \mathbb{P}\left(|Z_n| \leq \frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \\ &\simeq \mathbb{P}\left(|Z| \leq \frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \\ &= \int_{-\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{p(1-p)}}}^{\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{p(1-p)}}} e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\end{aligned}$$

Posons  $a = \frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{p(1-p)}}$ , on a alors  $\varepsilon = a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$ , on vient d'établir que

$$\mathbb{P}(F_n \in I) = \mathbb{P}\left(p - a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) \simeq \mathbb{P}(-a \leq Z \leq a).$$

#### PROBABILITES

##### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

##### II – Loi des grands nombres

Intuition  
Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

##### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires  
Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

##### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
Fluctuation de la fréquence

#### STATISTIQUES

##### V – Estimateur ponctuel

##### VI – Intervalle de confiance

##### VII – Test d'hypothèse

Introduction  
Construction du test

### 3ème méthode.

Estimation de  $\mathbb{P}(F_n \in I)$  grâce au **Théorème de Moivre-Laplace**.

Rappelons que  $Z_n = \frac{N_n - np}{\sigma_n}$ , avec  $\sigma_n^2 = np(1-p)$ ,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F_n \in I) &= \mathbb{P}(|N_n - np| \leq n\varepsilon) = \mathbb{P}\left(|Z_n| \leq \frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \\ &\simeq \mathbb{P}\left(|Z| \leq \frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \\ &= \int_{-\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{p(1-p)}}}^{\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{p(1-p)}}} e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\end{aligned}$$

Posons  $a = \frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{p(1-p)}}$ , on a alors  $\varepsilon = a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$ , on vient d'établir que

$$\mathbb{P}(F_n \in I) = \mathbb{P}\left(p - a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) \simeq \mathbb{P}(-a \leq Z \leq a).$$

Remarques :

- Pour  $a = 3,6$ ,  $\mathbb{P}(-a \leq Z \leq a) \simeq 1$ .

#### PROBABILITES

##### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

##### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

##### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

##### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

#### STATISTIQUES

##### V – Estimateur ponctuel

##### VI – Intervalle de confiance

##### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

### 3ème méthode.

Estimation de  $\mathbb{P}(F_n \in I)$  grâce au **Théorème de Moivre-Laplace**.

Rappelons que  $Z_n = \frac{N_n - np}{\sigma_n}$ , avec  $\sigma_n^2 = np(1-p)$ ,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F_n \in I) &= \mathbb{P}(|N_n - np| \leq n\varepsilon) = \mathbb{P}\left(|Z_n| \leq \frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \\ &\simeq \mathbb{P}\left(|Z| \leq \frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \\ &= \int_{-\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{p(1-p)}}}^{\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{p(1-p)}}} e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\end{aligned}$$

Posons  $a = \frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{p(1-p)}}$ , on a alors  $\varepsilon = a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$ , on vient d'établir que

$$\mathbb{P}(F_n \in I) = \mathbb{P}\left(p - a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) \simeq \mathbb{P}(-a \leq Z \leq a).$$

Remarques :

- Pour  $a = 3,6$ ,  $\mathbb{P}(-a \leq Z \leq a) \simeq 1$ .
- Cette expression montre qu'un échantillon 100 fois plus important donnera, avec la même probabilité, une fluctuation 10 fois plus petite.

#### PROBABILITES

I – Modélisation d'une  
expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

II – Loi des grands  
nombres

Intuition  
Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

III – Théorème de  
Moivre-Laplace

Commentaires  
Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

IV – Intervalle de  
fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

#### STATISTIQUES

V – Estimateur  
ponctuel

VI – Intervalle de  
confiance

VII – Test d'hypothèse

Introduction  
Construction du test

### 3ème méthode.

Estimation de  $\mathbb{P}(F_n \in I)$  grâce au **Théorème de Moivre-Laplace**.

Rappelons que  $Z_n = \frac{N_n - np}{\sigma_n}$ , avec  $\sigma_n^2 = np(1-p)$ ,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F_n \in I) &= \mathbb{P}(|N_n - np| \leq n\varepsilon) = \mathbb{P}\left(|Z_n| \leq \frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \\ &\simeq \mathbb{P}\left(|Z| \leq \frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \\ &= \int_{-\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{p(1-p)}}}^{\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{p(1-p)}}} e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\end{aligned}$$

Posons  $a = \frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{p(1-p)}}$ , on a alors  $\varepsilon = a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$ , on vient d'établir que

$$\mathbb{P}(F_n \in I) = \mathbb{P}\left(p - a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) \simeq \mathbb{P}(-a \leq Z \leq a).$$

### Remarques :

- Pour  $a = 3,6$ ,  $\mathbb{P}(-a \leq Z \leq a) \simeq 1$ .
- Cette expression montre qu'un échantillon 100 fois plus important donnera, avec la même probabilité, une fluctuation 10 fois plus petite.
- On peut, grâce à ces outils, répondre par exemple à la question, pour quelle taille minimum d'échantillon la fréquence d'observation de succès sera comprise entre  $(p-0,01)$  et  $(p+0,01)$  avec 95 % de chance. . .

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition  
Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires  
Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction  
Construction du test

# Panorama

## Probabilités - Statistiques

### PROBABILITES :

*Modélisation d'une expérience aléatoire*  
*Loi des grands nombres*  
*Théorème de Moivre-Laplace - Loi Normale*  
*Intervalle de fluctuation*

### STATISTIQUES :

*Estimateur ponctuel*  
*Intervalle de confiance*  
*Test sur le paramètre  $p$  d'une loi Binomiale*

Janvier 2014

N. Gozlan, P-M. Samson  
 Université Paris-Est Marne-la-Vallée

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition  
Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires  
Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction  
Construction du test

## PROBABILITES

### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

### II – Loi des grands nombres

Intuition  
Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires  
Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
Fluctuation de la fréquence

## STATISTIQUES

### V – Estimateur ponctuel

### VI – Intervalle de confiance

### VII – Test d'hypothèse

Introduction  
Construction du test



### Problème simple de probabilité

Une urne contient  $1/4$  de bonbons. Quelle est la probabilité qu'au cours de 50 tirages avec remise, la fréquence d'apparition d'un bonbon soit comprise entre 0,2 et 0,3 ?

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition  
Démonstration de la loi faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires  
Approximation de la loi binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction  
Construction du test

### Problème simple de probabilité

Une urne contient 1/4 de bonbons. Quelle est la probabilité qu'au cours de 50 tirages avec remise, la fréquence d'apparition d'un bonbon soit comprise entre 0,2 et 0,3 ?

$$n = 50,$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(0,2 \leq F_n \leq 0,3) &= \mathbb{P}\left(\frac{0,2 - 0,25}{\sqrt{\frac{0,25(1-0,25)}{50}}} \leq Z_n \leq \frac{0,3 - 0,25}{\sqrt{\frac{0,25(1-0,25)}{50}}}\right) \\ &\simeq \mathbb{P}(-0,82 \leq Z_n \leq 0,82) \\ &\simeq \mathbb{P}(|Z| \leq 0,82) \simeq 0,59 \quad \text{où } Z \sim \mathcal{N}(0,1).\end{aligned}$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition  
Démonstration de la loi faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires  
Approximation de la loi binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction  
Construction du test

### Problème simple de probabilité

Une urne contient 1/4 de bonbons. Quelle est la probabilité qu'au cours de 50 tirages avec remise, la fréquence d'apparition d'un bonbon soit comprise entre 0,2 et 0,3 ?

$n = 50$ ,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(0,2 \leq F_n \leq 0,3) &= \mathbb{P}\left(\frac{0,2 - 0,25}{\sqrt{\frac{0,25(1-0,25)}{50}}} \leq Z_n \leq \frac{0,3 - 0,25}{\sqrt{\frac{0,25(1-0,25)}{50}}}\right) \\ &\simeq \mathbb{P}(-0,82 \leq Z_n \leq 0,82) \\ &\simeq \mathbb{P}(|Z| \leq 0,82) \simeq 0,59 \quad \text{où } Z \sim \mathcal{N}(0,1).\end{aligned}$$

### Problème de statistique "inverse"

On effectue 50 tirages avec remise dans une urne contenant une proportion de bonbons **inconnue**  $p$ . Suite à ces tirages, la fréquence d'apparition de bonbon observée est  $F_n = 0,3$ .

- Peut-on donner **une estimation de  $p$**  ?

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

### Problème simple de probabilité

Une urne contient 1/4 de bonbons. Quelle est la probabilité qu'au cours de 50 tirages avec remise, la fréquence d'apparition d'un bonbon soit comprise entre 0,2 et 0,3 ?

$$n = 50,$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(0,2 \leq F_n \leq 0,3) &= \mathbb{P}\left(\frac{0,2 - 0,25}{\sqrt{\frac{0,25(1-0,25)}{50}}} \leq Z_n \leq \frac{0,3 - 0,25}{\sqrt{\frac{0,25(1-0,25)}{50}}}\right) \\ &\simeq \mathbb{P}(-0,82 \leq Z_n \leq 0,82) \\ &\simeq \mathbb{P}(|Z| \leq 0,82) \simeq 0,59 \quad \text{où } Z \sim \mathcal{N}(0,1).\end{aligned}$$

### Problème de statistique "inverse"

On effectue 50 tirages avec remise dans une urne contenant une proportion de bonbons **inconnue**  $p$ . Suite à ces tirages, la fréquence d'apparition de bonbon observée est  $F_n = 0,3$ .

- Peut-on donner **une estimation de  $p$**  ?
- Dans quelle mesure peut-on affirmer que  **$p = 1/4$**  ?

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## V – Estimateur ponctuel du paramètre $p$ d'une loi binomiale

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## V – Estimateur ponctuel du paramètre $p$ d'une loi binomiale

Rappelons que

### Loi forte des grands nombres

$$\mathbb{P} \left( \left\{ \omega \in \Omega, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(\omega) = p \right\} \right) = 1.$$

#### PROBABILITES

##### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

##### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

##### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

##### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

#### STATISTIQUES

##### V – Estimateur ponctuel

##### VI – Intervalle de confiance

##### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## V – Estimateur ponctuel du paramètre $p$ d'une loi binomiale

Rappelons que

### Loi forte des grands nombres

$$\mathbb{P} \left( \left\{ \omega \in \Omega, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(\omega) = p \right\} \right) = 1.$$

Autrement dit, quel que soit l'échantillon  $\omega = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$  observé, s'il est de grande taille  $n$ , la fréquence de succès  $F_n(\omega)$  issue de cet échantillon est proche de  $p$ .

#### PROBABILITES

##### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

##### II – Loi des grands nombres

Intuition  
Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

##### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires  
Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

##### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
Fluctuation de la fréquence

#### STATISTIQUES

##### V – Estimateur ponctuel

##### VI – Intervalle de confiance

##### VII – Test d'hypothèse

Introduction  
Construction du test

## V – Estimateur ponctuel du paramètre $p$ d'une loi binomiale

Rappelons que

### Loi forte des grands nombres

$$\mathbb{P} \left( \left\{ \omega \in \Omega, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(\omega) = p \right\} \right) = 1.$$

Autrement dit, quel que soit l'échantillon  $\omega = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$  observé, s'il est de grande taille  $n$ , la fréquence de succès  $F_n(\omega)$  issue de cet échantillon est proche de  $p$ .

### Définition

- $F_n$  est appelé **estimateur asymptotique** de  $p$ .

#### PROBABILITES

##### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

##### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

##### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

##### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

#### STATISTIQUES

##### V – Estimateur ponctuel

##### VI – Intervalle de confiance

##### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test



## V – Estimateur ponctuel du paramètre $p$ d'une loi binomiale

Rappelons que

### Loi forte des grands nombres

$$\mathbb{P} \left( \left\{ \omega \in \Omega, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(\omega) = p \right\} \right) = 1.$$

Autrement dit, quel que soit l'échantillon  $\omega = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$  observé, s'il est de grande taille  $n$ , la fréquence de succès  $F_n(\omega)$  issue de cet échantillon est proche de  $p$ .

### Définition

- $F_n$  est appelé **estimateur asymptotique** de  $p$ .
- $F_n$  est un estimateur de  $p$  dit "**sans biais**" car  $\mathbb{E}(F_n) = p$ .

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## V – Estimateur ponctuel du paramètre $p$ d'une loi binomiale

Rappelons que

### Loi forte des grands nombres

$$\mathbb{P} \left( \left\{ \omega \in \Omega, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(\omega) = p \right\} \right) = 1.$$

Autrement dit, quel que soit l'échantillon  $\omega = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$  observé, s'il est de grande taille  $n$ , la fréquence de succès  $F_n(\omega)$  issue de cet échantillon est proche de  $p$ .

### Définition

- $F_n$  est appelé **estimateur asymptotique** de  $p$ .
- $F_n$  est un estimateur de  $p$  dit "**sans biais**" car  $\mathbb{E}(F_n) = p$ .  
( $\mathbb{E}(F_n)$  s'interprète comme la moyenne sur toutes les observations  $\omega$  de probabilité  $\mathbb{P}(\omega)$ )

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition  
Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires  
Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction  
Construction du test

## V – Estimateur ponctuel du paramètre $p$ d'une loi binomiale

Rappelons que

### Loi forte des grands nombres

$$\mathbb{P} \left( \left\{ \omega \in \Omega, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(\omega) = p \right\} \right) = 1.$$

Autrement dit, quel que soit l'échantillon  $\omega = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$  observé, s'il est de grande taille  $n$ , la fréquence de succès  $F_n(\omega)$  issue de cet échantillon est proche de  $p$ .

### Définition

- $F_n$  est appelé **estimateur asymptotique** de  $p$ .
- $F_n$  est un estimateur de  $p$  dit "**sans biais**" car  $\mathbb{E}(F_n) = p$ .  
( $\mathbb{E}(F_n)$  s'interprète comme la moyenne sur toutes les observations  $\omega$  de probabilité  $\mathbb{P}(\omega)$ ),  $\mathbb{E}(F_n) = \sum_{\omega} F_n(\omega) \mathbb{P}(\omega)$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition  
Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires  
Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction  
Construction du test

## V – Estimateur ponctuel du paramètre $p$ d'une loi binomiale

Rappelons que

### Loi forte des grands nombres

$$\mathbb{P} \left( \left\{ \omega \in \Omega, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(\omega) = p \right\} \right) = 1.$$

Autrement dit, quel que soit l'échantillon  $\omega = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$  observé, s'il est de grande taille  $n$ , la fréquence de succès  $F_n(\omega)$  issue de cet échantillon est proche de  $p$ .

### Définition

- $F_n$  est appelé **estimateur asymptotique** de  $p$ .
- $F_n$  est un estimateur de  $p$  dit "**sans biais**" car  $\mathbb{E}(F_n) = p$ .  
( $\mathbb{E}(F_n)$  s'interprète comme la moyenne sur toutes les observations  $\omega$  de probabilité  $\mathbb{P}(\omega)$ )

Cette **estimation ponctuelle**  $F_n(\omega)$  de  $p$ , qui correspond à la fréquence issue d'un échantillon **n'est pas satisfaisante**.

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## V – Estimateur ponctuel du paramètre $p$ d'une loi binomiale

Rappelons que

### Loi forte des grands nombres

$$\mathbb{P} \left( \left\{ \omega \in \Omega, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(\omega) = p \right\} \right) = 1.$$

Autrement dit, quel que soit l'échantillon  $\omega = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$  observé, s'il est de grande taille  $n$ , la fréquence de succès  $F_n(\omega)$  issue de cet échantillon est proche de  $p$ .

### Définition

- $F_n$  est appelé **estimateur asymptotique** de  $p$ .
- $F_n$  est un estimateur de  $p$  dit "**sans biais**" car  $\mathbb{E}(F_n) = p$ .  
( $\mathbb{E}(F_n)$  s'interprète comme la moyenne sur toutes les observations  $\omega$  de probabilité  $\mathbb{P}(\omega)$ )

Cette **estimation ponctuelle**  $F_n(\omega)$  de  $p$ , qui correspond à la fréquence issue d'un échantillon **n'est pas satisfaisante**. En effet, un autre échantillon  $\omega'$  obtenu lors d'une autre observation donnerait une autre fréquence  $F_n(\omega')$ .

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

V – Estimateur ponctuel du paramètre  $p$  d'une loi binomiale

Rappelons que

## Loi forte des grands nombres

$$\mathbb{P} \left( \left\{ \omega \in \Omega, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(\omega) = p \right\} \right) = 1.$$

Autrement dit, quel que soit l'échantillon  $\omega = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$  observé, s'il est de grande taille  $n$ , la fréquence de succès  $F_n(\omega)$  issue de cet échantillon est proche de  $p$ .

## Définition

- $F_n$  est appelé **estimateur asymptotique** de  $p$ .
- $F_n$  est un estimateur de  $p$  dit "**sans biais**" car  $\mathbb{E}(F_n) = p$ .  
( $\mathbb{E}(F_n)$  s'interprète comme la moyenne sur toutes les observations  $\omega$  de probabilité  $\mathbb{P}(\omega)$ )

Cette **estimation ponctuelle**  $F_n(\omega)$  de  $p$ , qui correspond à la fréquence issue d'un échantillon **n'est pas satisfaisante**. En effet, un autre échantillon  $\omega'$  obtenu lors d'une autre observation donnerait une autre fréquence  $F_n(\omega')$ .

**Plutôt qu'une valeur unique** qui estime  $p$ , nous allons construire, à partir de cette fréquence observée  $F_n$ , **un intervalle de valeurs** qui contient  $p$  avec une forte probabilité.

## PROBABILITES

I – Modélisation d'une  
expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

II – Loi des grands  
nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombresIII – Théorème de  
Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normaleIV – Intervalle de  
fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

## STATISTIQUES

V – Estimateur  
ponctuelVI – Intervalle de  
confiance

## VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

V – Estimateur ponctuel du paramètre  $p$  d'une loi binomiale

Rappelons que

## Loi forte des grands nombres

$$\mathbb{P} \left( \left\{ \omega \in \Omega, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(\omega) = p \right\} \right) = 1.$$

Autrement dit, quel que soit l'échantillon  $\omega = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$  observé, s'il est de grande taille  $n$ , la fréquence de succès  $F_n(\omega)$  issue de cet échantillon est proche de  $p$ .

## Définition

- $F_n$  est appelé **estimateur asymptotique** de  $p$ .
- $F_n$  est un estimateur de  $p$  dit "**sans biais**" car  $\mathbb{E}(F_n) = p$ .  
( $\mathbb{E}(F_n)$  s'interprète comme la moyenne sur toutes les observations  $\omega$  de probabilité  $\mathbb{P}(\omega)$ )

Cette **estimation ponctuelle**  $F_n(\omega)$  de  $p$ , qui correspond à la fréquence issue d'un échantillon **n'est pas satisfaisante**. En effet, un autre échantillon  $\omega'$  obtenu lors d'une autre observation donnerait une autre fréquence  $F_n(\omega')$ .

**Plutôt qu'une valeur unique** qui estime  $p$ , nous allons construire, à partir de cette fréquence observée  $F_n$ , **un intervalle de valeurs** qui contient  $p$  avec une forte probabilité.

Cet intervalle est appelé **intervalle de confiance** pour le paramètre  $p$ .

## PROBABILITES

I – Modélisation d'une  
expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

II – Loi des grands  
nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombresIII – Théorème de  
Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normaleIV – Intervalle de  
fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

## STATISTIQUES

V – Estimateur  
ponctuelVI – Intervalle de  
confiance

## VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## VI – Intervalle de confiance pour le paramètre $p$ d'une loi binomiale

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test



## VI – Intervalle de confiance pour le paramètre $p$ d'une loi binomiale

La fréquence de succès  $F_n$  varie en fonction des observations autour de la valeur  $p$ .

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## VI – Intervalle de confiance pour le paramètre $p$ d'une loi binomiale

La fréquence de succès  $F_n$  varie en fonction des observations autour de la valeur  $p$ .

Rappel : (à l'aide du Théorème de Moivre-Laplace,  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ )

$$\mathbb{P} \left( p - a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right) \simeq \mathbb{P}(-a \leq Z \leq a), \quad a \geq 0.$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## VI – Intervalle de confiance pour le paramètre $p$ d'une loi binomiale

La fréquence de succès  $F_n$  varie en fonction des observations autour de la valeur  $p$ .

Rappel : (à l'aide du Théorème de Moivre-Laplace,  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ )

$$\mathbb{P} \left( p - a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right) \simeq \mathbb{P}(-a \leq Z \leq a), \quad a \geq 0.$$

Cette expression s'écrit encore

$$\mathbb{P} \left( F_n - a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right) \simeq \mathbb{P}(-a \leq Z \leq a).$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## VI – Intervalle de confiance pour le paramètre $p$ d'une loi binomiale

La fréquence de succès  $F_n$  varie en fonction des observations autour de la valeur  $p$ .

Rappel : (à l'aide du Théorème de Moivre-Laplace,  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ )

$$\mathbb{P} \left( p - a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right) \simeq \mathbb{P}(-a \leq Z \leq a), \quad a \geq 0.$$

Cette expression s'écrit encore

$$\mathbb{P} \left( F_n - a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right) \simeq \mathbb{P}(-a \leq Z \leq a).$$

- **Première approximation** : Puisque  $p(1-p) \leq 1/4$  pour  $p \in [0, 1]$ , on obtient

$$\mathbb{P} \left( F_n - \frac{a}{2\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + \frac{a}{2\sqrt{n}} \right) \gtrsim \mathbb{P}(-a \leq Z \leq a).$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## VI – Intervalle de confiance pour le paramètre $p$ d'une loi binomiale

La fréquence de succès  $F_n$  varie en fonction des observations autour de la valeur  $p$ .

Rappel : (à l'aide du Théorème de Moivre-Laplace,  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ )

$$\mathbb{P} \left( p - a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right) \simeq \mathbb{P}(-a \leq Z \leq a), \quad a \geq 0.$$

Cette expression s'écrit encore

$$\mathbb{P} \left( F_n - a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right) \simeq \mathbb{P}(-a \leq Z \leq a).$$

- **Première approximation** : Puisque  $p(1-p) \leq 1/4$  pour  $p \in [0, 1]$ , on obtient

$$\mathbb{P} \left( F_n - \frac{a}{2\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + \frac{a}{2\sqrt{n}} \right) \gtrsim \mathbb{P}(-a \leq Z \leq a).$$

Soit  $\alpha \in ]0, 1[$  et  $a(\alpha) > 0$  tel que :

$$\mathbb{P}(-a(\alpha) \leq Z \leq a(\alpha)) = 1 - \alpha$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## VI – Intervalle de confiance pour le paramètre $p$ d'une loi binomiale

La fréquence de succès  $F_n$  varie en fonction des observations autour de la valeur  $p$ .

Rappel : (à l'aide du Théorème de Moivre-Laplace,  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ )

$$\mathbb{P}\left(p - a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) \simeq \mathbb{P}(-a \leq Z \leq a), \quad a \geq 0.$$

Cette expression s'écrit encore

$$\mathbb{P}\left(F_n - a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) \simeq \mathbb{P}(-a \leq Z \leq a).$$

- **Première approximation** : Puisque  $p(1-p) \leq 1/4$  pour  $p \in [0, 1]$ , on obtient

$$\mathbb{P}\left(F_n - \frac{a}{2\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + \frac{a}{2\sqrt{n}}\right) \gtrsim \mathbb{P}(-a \leq Z \leq a).$$

Soit  $\alpha \in ]0, 1[$  et  $a(\alpha) > 0$  tel que :

$$\mathbb{P}(-a(\alpha) \leq Z \leq a(\alpha)) = 1 - \alpha$$

(par exemple :  $a(0,05) = 1,96$ ).

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## VI – Intervalle de confiance pour le paramètre $p$ d'une loi binomiale

La fréquence de succès  $F_n$  varie en fonction des observations autour de la valeur  $p$ .

Rappel : (à l'aide du Théorème de Moivre-Laplace,  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ )

$$\mathbb{P}\left(p - a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) \simeq \mathbb{P}(-a \leq Z \leq a), \quad a \geq 0.$$

Cette expression s'écrit encore

$$\mathbb{P}\left(F_n - a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) \simeq \mathbb{P}(-a \leq Z \leq a).$$

- **Première approximation** : Puisque  $p(1-p) \leq 1/4$  pour  $p \in [0, 1]$ , on obtient

$$\mathbb{P}\left(F_n - \frac{a}{2\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + \frac{a}{2\sqrt{n}}\right) \gtrsim \mathbb{P}(-a \leq Z \leq a).$$

Soit  $\alpha \in ]0, 1[$  et  $a(\alpha) > 0$  tel que :

$$\mathbb{P}(-a(\alpha) \leq Z \leq a(\alpha)) = 1 - \alpha$$

(par exemple :  $a(0,05) = 1,96$ ). L'intervalle (**aléatoire**)

$$\mathcal{J}(\omega) = \left[ F_n(\omega) - \frac{a(\alpha)}{2\sqrt{n}}, F_n(\omega) + \frac{a(\alpha)}{2\sqrt{n}} \right]$$

est tel que  $\mathbb{P}(p \in \mathcal{J}) \gtrsim 1 - \alpha$ .

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## VI – Intervalle de confiance pour le paramètre $p$ d'une loi binomiale

La fréquence de succès  $F_n$  varie en fonction des observations autour de la valeur  $p$ .

Rappel : (à l'aide du Théorème de Moivre-Laplace,  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ )

$$\mathbb{P}\left(p - a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) \simeq \mathbb{P}(-a \leq Z \leq a), \quad a \geq 0.$$

Cette expression s'écrit encore

$$\mathbb{P}\left(F_n - a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) \simeq \mathbb{P}(-a \leq Z \leq a).$$

- **Première approximation** : Puisque  $p(1-p) \leq 1/4$  pour  $p \in [0, 1]$ , on obtient

$$\mathbb{P}\left(F_n - \frac{a}{2\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + \frac{a}{2\sqrt{n}}\right) \gtrsim \mathbb{P}(-a \leq Z \leq a).$$

Soit  $\alpha \in ]0, 1[$  et  $a(\alpha) > 0$  tel que :

$$\mathbb{P}(-a(\alpha) \leq Z \leq a(\alpha)) = 1 - \alpha$$

(par exemple :  $a(0,05) = 1,96$ ). L'intervalle (**aléatoire**)

$$\mathcal{J}(\omega) = \left[ F_n(\omega) - \frac{a(\alpha)}{2\sqrt{n}}, F_n(\omega) + \frac{a(\alpha)}{2\sqrt{n}} \right]$$

est tel que  $\mathbb{P}(p \in \mathcal{J}) \gtrsim 1 - \alpha$ .

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test



- Première approximation :

### Définition

L'intervalle  $J = \left[ F_n - \frac{a(\alpha)}{2\sqrt{n}}, F_n + \frac{a(\alpha)}{2\sqrt{n}} \right]$  satisfait  $\mathbb{P}(p \in J) \gtrsim 1 - \alpha$ .

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition  
Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires  
Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction  
Construction du test

- Première approximation :

### Définition

L'intervalle  $J = \left[ F_n - \frac{a(\alpha)}{2\sqrt{n}}, F_n + \frac{a(\alpha)}{2\sqrt{n}} \right]$  satisfait  $\mathbb{P}(p \in J) \gtrsim 1 - \alpha$ .

C'est un **intervalle de confiance** pour le paramètre **inconnu**  $p$ .

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition  
Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires  
Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction  
Construction du test

- Première approximation :

### Définition

L'intervalle  $J = \left[ F_n - \frac{a(\alpha)}{2\sqrt{n}}, F_n + \frac{a(\alpha)}{2\sqrt{n}} \right]$  satisfait  $\mathbb{P}(p \in J) \gtrsim 1 - \alpha$ .

C'est un **intervalle de confiance** pour le paramètre **inconnu**  $p$ .

La probabilité  $(1 - \alpha)$  est le **niveau de confiance** (proche de 1).

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition  
Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires  
Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction  
Construction du test

- Première approximation :

### Définition

L'intervalle  $J = \left[ F_n - \frac{a(\alpha)}{2\sqrt{n}}, F_n + \frac{a(\alpha)}{2\sqrt{n}} \right]$  satisfait  $\mathbb{P}(p \in J) \gtrsim 1 - \alpha$ .

C'est un **intervalle de confiance** pour le paramètre **inconnu**  $p$ .

La probabilité  $(1 - \alpha)$  est le **niveau de confiance** (proche de 1).

Chaque échantillon observé permet de construire un tel intervalle de confiance au niveau  $(1 - \alpha)$  souhaité.

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition  
Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires  
Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction  
Construction du test

- Première approximation :

### Définition

L'intervalle  $J = \left[ F_n - \frac{a(\alpha)}{2\sqrt{n}}, F_n + \frac{a(\alpha)}{2\sqrt{n}} \right]$  satisfait  $\mathbb{P}(p \in J) \gtrsim 1 - \alpha$ .

C'est un **intervalle de confiance** pour le paramètre **inconnu**  $p$ .

La probabilité  $(1 - \alpha)$  est le **niveau de confiance** (proche de 1).

Chaque échantillon observé permet de construire un tel intervalle de confiance au niveau  $(1 - \alpha)$  souhaité.

Dans l'exemple précédent,  $n = 50$ ,  $F_n = 0,3$ , un intervalle de confiance pour  $p$  au niveau de confiance 95% est

$$J = \left[ 0,3 - \frac{1,96}{2\sqrt{50}}; 0,3 + \frac{1,96}{2\sqrt{50}} \right] \simeq [0,3 - 0,14; 0,3 + 0,14]$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition  
Démonstration de la loi faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires  
Approximation de la loi binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction  
Construction du test

## Intervalle de confiance

- Seconde approximation :

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Intervalle de confiance

- Seconde approximation : Rappel :

$$\mathbb{P} \left( \underbrace{F_n - a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}}_{(e)} \right) \simeq \mathbb{P}(-a \leq Z \leq a).$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Intervalle de confiance

- Seconde approximation : Rappel :

$$\mathbb{P} \left( \underbrace{F_n - a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}}_{(e)} \right) \simeq \mathbb{P}(-a \leq Z \leq a).$$

Observons que

### PROBABILITES

I – Modélisation d'une  
expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

II – Loi des grands  
nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

III – Théorème de  
Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

IV – Intervalle de  
fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

V – Estimateur  
ponctuel

VI – Intervalle de  
confiance

VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test



## Intervalle de confiance

- Seconde approximation : Rappel :

$$\mathbb{P} \left( \underbrace{F_n - a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}}_{(e)} \right) \simeq \mathbb{P}(-a \leq Z \leq a).$$

Observons que  $(e) \Leftrightarrow (F_n - p)^2 \leq a^2 \frac{p(1-p)}{n} \Leftrightarrow P_0 \leq p \leq P_1$ , avec

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Intervalle de confiance

- Seconde approximation : Rappel :

$$\mathbb{P} \left( \underbrace{F_n - a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}}_{(e)} \right) \simeq \mathbb{P}(-a \leq Z \leq a).$$

Observons que  $(e) \Leftrightarrow (F_n - p)^2 \leq a^2 \frac{p(1-p)}{n} \Leftrightarrow P_0 \leq p \leq P_1$ , avec

$$P_0 = F_n - a \frac{\sqrt{F_n(1-F_n)}}{\sqrt{n}} (1 + \epsilon(n)), \quad P_1 = F_n + a \frac{\sqrt{F_n(1-F_n)}}{\sqrt{n}} (1 + \epsilon(n))$$

et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon(n) = 0$ .

### PROBABILITES

I – Modélisation d'une  
expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

II – Loi des grands  
nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

III – Théorème de  
Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

IV – Intervalle de  
fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

V – Estimateur  
ponctuel

VI – Intervalle de  
confiance

VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Intervalle de confiance

- Seconde approximation : Rappel :

$$\mathbb{P} \left( \underbrace{F_n - a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}}_{(e)} \right) \simeq \mathbb{P}(-a \leq Z \leq a).$$

Observons que  $(e) \Leftrightarrow (F_n - p)^2 \leq a^2 \frac{p(1-p)}{n} \Leftrightarrow P_0 \leq p \leq P_1$ , avec

$$P_0 = F_n - a \frac{\sqrt{F_n(1-F_n)}}{\sqrt{n}} (1 + \epsilon(n)), \quad P_1 = F_n + a \frac{\sqrt{F_n(1-F_n)}}{\sqrt{n}} (1 + \epsilon(n))$$

et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon(n) = 0$ .

### Définition

$$\text{L'intervalle } J = \left[ F_n - a(\alpha) \frac{\sqrt{F_n(1-F_n)}}{\sqrt{n}}, F_n + a(\alpha) \frac{\sqrt{F_n(1-F_n)}}{\sqrt{n}} \right],$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Intervalle de confiance

- Seconde approximation : Rappel :

$$\mathbb{P} \left( \underbrace{F_n - a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}}_{(e)} \right) \simeq \mathbb{P}(-a \leq Z \leq a).$$

Observons que  $(e) \Leftrightarrow (F_n - p)^2 \leq a^2 \frac{p(1-p)}{n} \Leftrightarrow P_0 \leq p \leq P_1$ , avec

$$P_0 = F_n - a \frac{\sqrt{F_n(1-F_n)}}{\sqrt{n}} (1 + \epsilon(n)), \quad P_1 = F_n + a \frac{\sqrt{F_n(1-F_n)}}{\sqrt{n}} (1 + \epsilon(n))$$

et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon(n) = 0$ .

### Définition

L'intervalle  $J = \left[ F_n - a(\alpha) \frac{\sqrt{F_n(1-F_n)}}{\sqrt{n}}, F_n + a(\alpha) \frac{\sqrt{F_n(1-F_n)}}{\sqrt{n}} \right]$ ,  
 est un **intervalle de confiance** pour  $p$  au niveau de confiance  $(1 - \alpha)$ .

En effet, lorsque  $n$  est grand, on a

$$\mathbb{P}(p \in J) \simeq$$

### PROBABILITES

I – Modélisation d'une  
 expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

II – Loi des grands  
 nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
 faible des grands nombres

III – Théorème de  
 Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
 binomiale par la loi normale

IV – Intervalle de  
 fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

V – Estimateur  
 ponctuel

VI – Intervalle de  
 confiance

VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Intervalle de confiance

- Seconde approximation : Rappel :

$$\mathbb{P} \left( \underbrace{F_n - a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}}_{(e)} \right) \simeq \mathbb{P}(-a \leq Z \leq a).$$

Observons que (e)  $\Leftrightarrow (F_n - p)^2 \leq a^2 \frac{p(1-p)}{n} \Leftrightarrow P_0 \leq p \leq P_1$ , avec

$$P_0 = F_n - a \frac{\sqrt{F_n(1-F_n)}}{\sqrt{n}} (1 + \epsilon(n)), \quad P_1 = F_n + a \frac{\sqrt{F_n(1-F_n)}}{\sqrt{n}} (1 + \epsilon(n))$$

et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon(n) = 0$ .

### Définition

L'intervalle  $J = \left[ F_n - a(\alpha) \frac{\sqrt{F_n(1-F_n)}}{\sqrt{n}}, F_n + a(\alpha) \frac{\sqrt{F_n(1-F_n)}}{\sqrt{n}} \right]$ ,  
est un **intervalle de confiance** pour  $p$  au niveau de confiance  $(1 - \alpha)$ .

En effet, lorsque  $n$  est grand, on a

$$\mathbb{P}(p \in J) \simeq \mathbb{P}(P_0 \leq p \leq P_1) \simeq$$

### PROBABILITES

I – Modélisation d'une  
expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

II – Loi des grands  
nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

III – Théorème de  
Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

IV – Intervalle de  
fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

V – Estimateur  
ponctuel

VI – Intervalle de  
confiance

VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Intervalle de confiance

- Seconde approximation : Rappel :

$$\mathbb{P} \left( \underbrace{F_n - a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}}_{(e)} \right) \simeq \mathbb{P}(-a \leq Z \leq a).$$

Observons que (e)  $\Leftrightarrow (F_n - p)^2 \leq a^2 \frac{p(1-p)}{n} \Leftrightarrow P_0 \leq p \leq P_1$ , avec

$$P_0 = F_n - a \frac{\sqrt{F_n(1-F_n)}}{\sqrt{n}} (1 + \epsilon(n)), \quad P_1 = F_n + a \frac{\sqrt{F_n(1-F_n)}}{\sqrt{n}} (1 + \epsilon(n))$$

et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon(n) = 0$ .

### Définition

L'intervalle  $J = \left[ F_n - a(\alpha) \frac{\sqrt{F_n(1-F_n)}}{\sqrt{n}}, F_n + a(\alpha) \frac{\sqrt{F_n(1-F_n)}}{\sqrt{n}} \right]$ ,  
est un **intervalle de confiance** pour  $p$  au niveau de confiance  $(1 - \alpha)$ .

En effet, lorsque  $n$  est grand, on a

$$\mathbb{P}(p \in J) \simeq \mathbb{P}(P_0 \leq p \leq P_1) \simeq \mathbb{P}(-a(\alpha) \leq Z \leq a(\alpha)) =$$

### PROBABILITES

I – Modélisation d'une  
expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

II – Loi des grands  
nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

III – Théorème de  
Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

IV – Intervalle de  
fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

V – Estimateur  
ponctuel

VI – Intervalle de  
confiance

VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Intervalle de confiance

- Seconde approximation : Rappel :

$$\mathbb{P} \left( \underbrace{F_n - a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}}_{(e)} \right) \simeq \mathbb{P}(-a \leq Z \leq a).$$

Observons que  $(e) \Leftrightarrow (F_n - p)^2 \leq a^2 \frac{p(1-p)}{n} \Leftrightarrow P_0 \leq p \leq P_1$ , avec

$$P_0 = F_n - a \frac{\sqrt{F_n(1-F_n)}}{\sqrt{n}} (1 + \epsilon(n)), \quad P_1 = F_n + a \frac{\sqrt{F_n(1-F_n)}}{\sqrt{n}} (1 + \epsilon(n))$$

et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon(n) = 0$ .

### Définition

L'intervalle  $J = \left[ F_n - a(\alpha) \frac{\sqrt{F_n(1-F_n)}}{\sqrt{n}}, F_n + a(\alpha) \frac{\sqrt{F_n(1-F_n)}}{\sqrt{n}} \right]$ ,  
est un **intervalle de confiance** pour  $p$  au niveau de confiance  $(1 - \alpha)$ .

En effet, lorsque  $n$  est grand, on a

$$\mathbb{P}(p \in J) \simeq \mathbb{P}(P_0 \leq p \leq P_1) \simeq \mathbb{P}(-a(\alpha) \leq Z \leq a(\alpha)) = 1 - \alpha.$$

### PROBABILITES

I – Modélisation d'une  
expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

II – Loi des grands  
nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

III – Théorème de  
Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

IV – Intervalle de  
fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

V – Estimateur  
ponctuel

VI – Intervalle de  
confiance

VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Intervalle de confiance

- Seconde approximation : Rappel :

$$\mathbb{P} \left( \underbrace{F_n - a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + a \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}}_{(e)} \right) \simeq \mathbb{P}(-a \leq Z \leq a).$$

Observons que  $(e) \Leftrightarrow (F_n - p)^2 \leq a^2 \frac{p(1-p)}{n} \Leftrightarrow P_0 \leq p \leq P_1$ , avec

$$P_0 = F_n - a \frac{\sqrt{F_n(1-F_n)}}{\sqrt{n}} (1 + \epsilon(n)), \quad P_1 = F_n + a \frac{\sqrt{F_n(1-F_n)}}{\sqrt{n}} (1 + \epsilon(n))$$

et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon(n) = 0$ .

### Définition

L'intervalle  $J = \left[ F_n - a(\alpha) \frac{\sqrt{F_n(1-F_n)}}{\sqrt{n}}, F_n + a(\alpha) \frac{\sqrt{F_n(1-F_n)}}{\sqrt{n}} \right]$ ,  
est un **intervalle de confiance** pour  $p$  au niveau de confiance  $(1 - \alpha)$ .

En effet, lorsque  $n$  est grand, on a

$$\mathbb{P}(p \in J) \simeq \mathbb{P}(P_0 \leq p \leq P_1) \simeq \mathbb{P}(-a(\alpha) \leq Z \leq a(\alpha)) = 1 - \alpha.$$

Dans  $(e)$ ,  $p(1-p) \rightsquigarrow F_n(1-F_n)$ .

### PROBABILITES

I – Modélisation d'une  
expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

II – Loi des grands  
nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

III – Théorème de  
Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

IV – Intervalle de  
fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

V – Estimateur  
ponctuel

VI – Intervalle de  
confiance

VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test



## VII – Test d’hypothèse sur le paramètre $p$ d’une loi binomiale

La construction de ce test d’hypothèse a pour but de répondre à la question suivante.

### Question :

Suite à 50 tirages avec remise dans une urne contenant une proportion de bonbons **inconnue**  $p$ , on observe une fréquence de succès  $F_n = 0,3$ .

**Est-ce-que  $p = 1/4$  ?** Ou plus généralement, **est-ce-que  $p = p_0$  ?** (où  $p_0$  est une proportion attendue fixée).

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d’une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition  
Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires  
Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d’échantillons  
Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d’hypothèse

Introduction

Construction du test

## VII – Test d’hypothèse sur le paramètre $p$ d’une loi binomiale

La construction de ce test d’hypothèse a pour but de répondre à la question suivante.

### Question :

Suite à 50 tirages avec remise dans une urne contenant une proportion de bonbons **inconnue**  $p$ , on observe une fréquence de succès  $F_n = 0,3$ .  
**Est-ce-que  $p = 1/4$  ?** Ou plus généralement, **est-ce-que  $p = p_0$  ?** (où  $p_0$  est une proportion attendue fixée).

Considérons la variable aléatoire

$$W_n(\omega) = \frac{F_n(\omega) - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}.$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d’une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition  
Démonstration de la loi faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires  
Approximation de la loi binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d’échantillons  
Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d’hypothèse

Introduction  
Construction du test

## VII – Test d’hypothèse sur le paramètre $p$ d’une loi binomiale

La construction de ce test d’hypothèse a pour but de répondre à la question suivante.

### Question :

Suite à 50 tirages avec remise dans une urne contenant une proportion de bonbons **inconnue**  $p$ , on observe une fréquence de succès  $F_n = 0,3$ .

**Est-ce-que  $p = 1/4$  ?** Ou plus généralement, **est-ce-que  $p = p_0$  ?** (où  $p_0$  est une proportion attendue fixée).

Considérons la variable aléatoire

$$W_n(\omega) = \frac{F_n(\omega) - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}.$$

Remarque :

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d’une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition  
Démonstration de la loi faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires  
Approximation de la loi binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d’échantillons  
Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d’hypothèse

Introduction  
Construction du test

## VII – Test d’hypothèse sur le paramètre $p$ d’une loi binomiale

La construction de ce test d’hypothèse a pour but de répondre à la question suivante.

### Question :

Suite à 50 tirages avec remise dans une urne contenant une proportion de bonbons **inconnue**  $p$ , on observe une fréquence de succès  $F_n = 0,3$ .  
**Est-ce-que  $p = 1/4$  ?** Ou plus généralement, **est-ce-que  $p = p_0$  ?** (où  $p_0$  est une proportion attendue fixée).

Considérons la variable aléatoire

$$W_n(\omega) = \frac{F_n(\omega) - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}.$$

**Remarque :** Etant donné un échantillon  $\omega$ , **cette variable est calculable.**  
Dans l’exemple précédent,

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d’une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition  
Démonstration de la loi faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires  
Approximation de la loi binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d’échantillons  
Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d’hypothèse

Introduction  
Construction du test

## VII – Test d’hypothèse sur le paramètre $p$ d’une loi binomiale

La construction de ce test d’hypothèse a pour but de répondre à la question suivante.

### Question :

Suite à 50 tirages avec remise dans une urne contenant une proportion de bonbons **inconnue**  $p$ , on observe une fréquence de succès  $F_n = 0,3$ .

**Est-ce-que  $p = 1/4$  ?** Ou plus généralement, **est-ce-que  $p = p_0$  ?** (où  $p_0$  est une proportion attendue fixée).

Considérons la variable aléatoire

$$W_n(\omega) = \frac{F_n(\omega) - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}.$$

**Remarque :** Etant donné un échantillon  $\omega$ , **cette variable est calculable.**

Dans l’exemple précédent,  $W_n = \frac{0,3-0,25}{\sqrt{\frac{0,25(1-0,25)}{50}}} \simeq 0,82$ .

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d’une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition  
Démonstration de la loi faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires  
Approximation de la loi binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d’échantillons  
Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d’hypothèse

Introduction  
Construction du test

# Comment se comporte cette variable aléatoire $W_n$ ?

## PROBABILITES

### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

## STATISTIQUES

### V – Estimateur ponctuel

### VI – Intervalle de confiance

### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Comment se comporte cette variable aléatoire $W_n$ ?

$$W_n = \frac{F_n - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} =$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Comment se comporte cette variable aléatoire $W_n$ ?

$$W_n = \frac{F_n - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \underbrace{\frac{F_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}}_{=Z_n} \cdot \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} +$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test



## Comment se comporte cette variable aléatoire $W_n$ ?

$$W_n = \frac{F_n - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \underbrace{\frac{F_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}}_{=Z_n} \cdot \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} + \underbrace{\sqrt{n} \frac{p - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}}_{=m_n}.$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Comment se comporte cette variable aléatoire $W_n$ ?

$$W_n = \frac{F_n - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \underbrace{\frac{F_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}}_{=Z_n} \cdot \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} + \underbrace{\sqrt{n} \frac{p - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}}_{=m_n}.$$

Rappelons que, d'après le Théorème de Moivre-Laplace,

$$Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Comment se comporte cette variable aléatoire $W_n$ ?

$$W_n = \frac{F_n - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \underbrace{\frac{F_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}}_{=Z_n} \cdot \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} + \underbrace{\sqrt{n} \frac{p - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}}_{=m_n}.$$

Rappelons que, d'après le Théorème de Moivre-Laplace,

$$Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Par conséquent, **avec grande probabilité, pour  $n \gg 1$**  ( $n$  suffisamment grand),

$$|Z_n| \leq 3,6$$

car  $\mathbb{P}(|Z| \leq 3,6) \simeq 0,9996$ .

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Comment se comporte cette variable aléatoire $W_n$ ?

$$W_n = \frac{F_n - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \underbrace{\frac{F_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}}_{=Z_n} \cdot \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} + \underbrace{\sqrt{n} \frac{p - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}}_{=m_n}.$$

Rappelons que, d'après le Théorème de Moivre-Laplace,

$$Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Par conséquent, **avec grande probabilité, pour  $n \gg 1$**  ( $n$  suffisamment grand),

$$|Z_n| \leq 3,6$$

car  $\mathbb{P}(|Z| \leq 3,6) \simeq 0,9996$ . Par suite,

- Si  $p = p_0$  alors  $W_n(\omega) = Z_n(\omega)$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Comment se comporte cette variable aléatoire $W_n$ ?

$$W_n = \frac{F_n - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \underbrace{\frac{F_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}}_{=Z_n} \cdot \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} + \underbrace{\sqrt{n} \frac{p - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}}_{=m_n}.$$

Rappelons que, d'après le Théorème de Moivre-Laplace,

$$Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Par conséquent, **avec grande probabilité, pour  $n \gg 1$**  ( $n$  suffisamment grand),

$$|Z_n| \leq 3,6$$

car  $\mathbb{P}(|Z| \leq 3,6) \simeq 0,9996$ . Par suite,

- Si  $p = p_0$  alors  $W_n(\omega) = Z_n(\omega)$  et avec grande probabilité, pour  $n \gg 1$ ,

$$|W_n(\omega)| \leq 3,6.$$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Comment se comporte cette variable aléatoire $W_n$ ?

$$W_n = \frac{F_n - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \underbrace{\frac{F_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}}_{=Z_n} \cdot \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} + \underbrace{\sqrt{n} \frac{p - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}}_{=m_n}.$$

Rappelons que, d'après le Théorème de Moivre-Laplace,

$$Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Par conséquent, **avec grande probabilité, pour  $n \gg 1$**  ( $n$  suffisamment grand),

$$|Z_n| \leq 3,6$$

car  $\mathbb{P}(|Z| \leq 3,6) \simeq 0,9996$ . Par suite,

- Si  $p = p_0$  alors  $W_n(\omega) = Z_n(\omega)$  et avec grande probabilité, pour  $n \gg 1$ ,

$$|W_n(\omega)| \leq 3,6.$$

- Si  $p \neq p_0$  alors puisque  $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = \pm \infty$ ,

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Comment se comporte cette variable aléatoire $W_n$ ?

$$W_n = \frac{F_n - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \underbrace{\frac{F_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}}_{=Z_n} \cdot \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} + \underbrace{\sqrt{n} \frac{p - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}}_{=m_n}.$$

Rappelons que, d'après le Théorème de Moivre-Laplace,

$$Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Par conséquent, **avec grande probabilité, pour  $n \gg 1$**  ( $n$  suffisamment grand),

$$|Z_n| \leq 3,6$$

car  $\mathbb{P}(|Z| \leq 3,6) \simeq 0,9996$ . Par suite,

- Si  $p = p_0$  alors  $W_n(\omega) = Z_n(\omega)$  et avec grande probabilité, pour  $n \gg 1$ ,

$$|W_n(\omega)| \leq 3,6.$$

- Si  $p \neq p_0$  alors puisque  $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = \pm \infty$ , avec grande probabilité,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |W_n(\omega)| = +\infty.$$

Simulations : [TestCabri2](#)

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Conclusion :

Si on observe que

- $|W_n(\omega)| \leq 3,6$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test



## Conclusion :

Si on observe que

- $|W_n(\omega)| \leq 3,6$  alors il y a de **fortes chances** pour que  $p = p_0$ .

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Conclusion :

Si on observe que

- $|W_n(\omega)| \leq 3,6$  alors il y a de **fortes chances** pour que  $p = p_0$ ,
- $|W_n(\omega)| \gg 3,6$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Conclusion :

Si on observe que

- $|W_n(\omega)| \leq 3,6$  alors il y a de **fortes chances** pour que  $p = p_0$ ,
- $|W_n(\omega)| \gg 3,6$  alors il y a de **fortes chances** pour que  $p \neq p_0$ .

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition  
Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires  
Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Conclusion :

Si on observe que

- $|W_n(\omega)| \leq 3,6$  alors il y a de **fortes chances** pour que  $p = p_0$ ,
- $|W_n(\omega)| \gg 3,6$  alors il y a de **fortes chances** pour que  $p \neq p_0$ .

Pour être plus précis et mesurer cette “forte chance”,

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Conclusion :

Si on observe que

- $|W_n(\omega)| \leq 3,6$  alors il y a de **fortes chances** pour que  $p = p_0$ ,
- $|W_n(\omega)| \gg 3,6$  alors il y a de **fortes chances** pour que  $p \neq p_0$ .

Pour être plus précis et mesurer cette “**forte chance**”, on construit un test,

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Conclusion :

Si on observe que

- $|W_n(\omega)| \leq 3,6$  alors il y a de **fortes chances** pour que  $p = p_0$ ,
- $|W_n(\omega)| \gg 3,6$  alors il y a de **fortes chances** pour que  $p \neq p_0$ .

Pour être plus précis et mesurer cette “**forte chance**”, on construit un test, dit

**test d'hypothèse de  $H_0 = \{p = p_0\}$  contre  $H_1 = \{p \neq p_0\}$ ,**

### PROBABILITES

I – Modélisation d'une  
expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

II – Loi des grands  
nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

III – Théorème de  
Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

IV – Intervalle de  
fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

V – Estimateur  
ponctuel

VI – Intervalle de  
confiance

VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Conclusion :

Si on observe que

- $|W_n(\omega)| \leq 3,6$  alors il y a de **fortes chances** pour que  $p = p_0$ ,
- $|W_n(\omega)| \gg 3,6$  alors il y a de **fortes chances** pour que  $p \neq p_0$ .

Pour être plus précis et mesurer cette “**forte chance**”, on construit un test, dit

**test d'hypothèse de  $H_0 = \{p = p_0\}$  contre  $H_1 = \{p \neq p_0\}$ ,**

en établissant **un seuil  $a$**  tel que

### PROBABILITES

I – Modélisation d'une  
expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

II – Loi des grands  
nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

III – Théorème de  
Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

IV – Intervalle de  
fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

V – Estimateur  
ponctuel

VI – Intervalle de  
confiance

VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Conclusion :

Si on observe que

- $|W_n(\omega)| \leq 3,6$  alors il y a de **fortes chances** pour que  $p = p_0$ ,
- $|W_n(\omega)| \gg 3,6$  alors il y a de **fortes chances** pour que  $p \neq p_0$ .

Pour être plus précis et mesurer cette “**forte chance**”, on construit un test, dit

**test d'hypothèse de  $H_0 = \{p = p_0\}$  contre  $H_1 = \{p \neq p_0\}$ ,**

en établissant **un seuil  $a$**  tel que

- si  $|W_n(\omega)| \leq a$  alors **on accepte** l'hypothèse  $H_0 = \{p = p_0\}$ ,

### PROBABILITES

I – Modélisation d'une  
expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

II – Loi des grands  
nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

III – Théorème de  
Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

IV – Intervalle de  
fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

V – Estimateur  
ponctuel

VI – Intervalle de  
confiance

VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test



## Conclusion :

Si on observe que

- $|W_n(\omega)| \leq 3,6$  alors il y a de **fortes chances** pour que  $p = p_0$ ,
- $|W_n(\omega)| \gg 3,6$  alors il y a de **fortes chances** pour que  $p \neq p_0$ .

Pour être plus précis et mesurer cette “**forte chance**”, on construit un test, dit

**test d'hypothèse de  $H_0 = \{p = p_0\}$  contre  $H_1 = \{p \neq p_0\}$ ,**

en établissant **un seuil  $a$**  tel que

- si  $|W_n(\omega)| \leq a$  alors **on accepte** l'hypothèse  $H_0 = \{p = p_0\}$ ,
- si  $|W_n(\omega)| > a$  alors **on rejette** l'hypothèse  $H_0 = \{p = p_0\}$ ,

### PROBABILITES

I – Modélisation d'une  
expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

II – Loi des grands  
nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

III – Théorème de  
Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

IV – Intervalle de  
fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

V – Estimateur  
ponctuel

VI – Intervalle de  
confiance

VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Conclusion :

Si on observe que

- $|W_n(\omega)| \leq 3,6$  alors il y a de **fortes chances** pour que  $p = p_0$ ,
- $|W_n(\omega)| \gg 3,6$  alors il y a de **fortes chances** pour que  $p \neq p_0$ .

Pour être plus précis et mesurer cette “**forte chance**”, on construit un test, dit

**test d'hypothèse de  $H_0 = \{p = p_0\}$  contre  $H_1 = \{p \neq p_0\}$ ,**

en établissant **un seuil  $a$**  tel que

- si  $|W_n(\omega)| \leq a$  alors **on accepte** l'hypothèse  $H_0 = \{p = p_0\}$ ,
- si  $|W_n(\omega)| > a$  alors **on rejette** l'hypothèse  $H_0 = \{p = p_0\}$ ,  
on accepte donc l'hypothèse  $H_1 = \{p \neq p_0\}$ .

### PROBABILITES

I – Modélisation d'une  
expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

II – Loi des grands  
nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

III – Théorème de  
Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

IV – Intervalle de  
fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

V – Estimateur  
ponctuel

VI – Intervalle de  
confiance

VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## PROBABILITES

### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

## STATISTIQUES

### V – Estimateur ponctuel

### VI – Intervalle de confiance

### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Construction du test

Comment choisir le seuil  $\alpha$  ?

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Construction du test

Comment choisir le seuil  $a$  ?

- 1ère remarque : **Supposons** qu'en effet  $p = p_0$ ,

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition  
Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires  
Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Construction du test

Comment choisir le seuil  $a$  ?

- 1ère remarque : Supposons qu'en effet  $p = p_0$ , alors  $W_n = Z_n$ .

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition  
Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires  
Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Construction du test

Comment choisir le seuil  $a$  ?

- 1<sup>ère</sup> remarque : Supposons qu'en effet  $p = p_0$ , alors  $W_n = Z_n$ .  
Cependant, quelle que soit le seuil  $a$ , si  $n \gg 1$ ,

$$\mathbb{P}_{\{p=p_0\}}(|W_n| > a) \neq 0.$$

### PROBABILITES

I – Modélisation d'une  
expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

II – Loi des grands  
nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

III – Théorème de  
Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

IV – Intervalle de  
fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

V – Estimateur  
ponctuel

VI – Intervalle de  
confiance

VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Construction du test

Comment choisir le seuil  $a$  ?

- 1<sup>ère</sup> remarque : Supposons qu'en effet  $p = p_0$ , alors  $W_n = Z_n$ .  
Cependant, quelle que soit le seuil  $a$ , si  $n \gg 1$ ,

$$\mathbb{P}_{\{p=p_0\}}(|W_n| > a) \neq 0.$$

Donc, il se peut qu'on observe  $|W_n(\omega)| > a$ .

### PROBABILITES

I – Modélisation d'une  
expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

II – Loi des grands  
nombres

Intuition  
Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

III – Théorème de  
Moivre-Laplace

Commentaires  
Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

IV – Intervalle de  
fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

V – Estimateur  
ponctuel

VI – Intervalle de  
confiance

VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test



## Construction du test

Comment choisir le seuil  $a$  ?

- 1<sup>ère</sup> remarque : Supposons qu'en effet  $p = p_0$ , alors  $W_n = Z_n$ .  
Cependant, quelle que soit le seuil  $a$ , si  $n \gg 1$ ,

$$\mathbb{P}_{\{p=p_0\}}(|W_n| > a) \neq 0.$$

Donc, il se peut qu'on observe  $|W_n(\omega)| > a$ .

On rejettera alors l'hypothèse  $H_0 = \{p = p_0\}$

### PROBABILITES

#### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

#### II – Loi des grands nombres

Intuition  
Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

#### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires  
Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

#### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

#### V – Estimateur ponctuel

#### VI – Intervalle de confiance

#### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Construction du test

Comment choisir le seuil  $a$  ?

- 1<sup>ère</sup> remarque : Supposons qu'en effet  $p = p_0$ , alors  $W_n = Z_n$ .  
 Cependant, quelle que soit le seuil  $a$ , si  $n \gg 1$ ,

$$\mathbb{P}_{\{p=p_0\}}(|W_n| > a) \neq 0.$$

Donc, il se peut qu'on observe  $|W_n(\omega)| > a$ .

On rejettera alors l'hypothèse  $H_0 = \{p = p_0\}$  à tort !

### PROBABILITES

I – Modélisation d'une  
 expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
 Schémas de Bernoulli

II – Loi des grands  
 nombres

Intuition  
 Démonstration de la loi  
 faible des grands nombres

III – Théorème de  
 Moivre-Laplace

Commentaires  
 Approximation de la loi  
 binomiale par la loi normale

IV – Intervalle de  
 fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
 Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

V – Estimateur  
 ponctuel

VI – Intervalle de  
 confiance

VII – Test d'hypothèse  
 Introduction

Construction du test

## Construction du test

Comment choisir le seuil  $a$  ?

- 1<sup>ère</sup> remarque : Supposons qu'en effet  $p = p_0$ , alors  $W_n = Z_n$ .  
 Cependant, quelle que soit le seuil  $a$ , si  $n \gg 1$ ,

$$\mathbb{P}_{\{p=p_0\}}(|W_n| > a) \neq 0.$$

Donc, il se peut qu'on observe  $|W_n(\omega)| > a$ .

On rejettera alors l'hypothèse  $H_0 = \{p = p_0\}$  à tort !

### Définition

$\mathbb{P}_{\{p=p_0\}}(|W_n| > a)$  est le **risque d'erreur de première espèce**.

On contrôle ce risque d'erreur en choisissant **un seuil  $a = a(\alpha)$**

### PROBABILITES

I – Modélisation d'une  
 expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

II – Loi des grands  
 nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
 faible des grands nombres

III – Théorème de  
 Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
 binomiale par la loi normale

IV – Intervalle de  
 fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

V – Estimateur  
 ponctuel

VI – Intervalle de  
 confiance

VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Construction du test

Comment choisir le seuil  $a$  ?

- 1<sup>ère</sup> remarque : Supposons qu'en effet  $p = p_0$ , alors  $W_n = Z_n$ .  
Cependant, quelle que soit le seuil  $a$ , si  $n \gg 1$ ,

$$\mathbb{P}_{\{p=p_0\}}(|W_n| > a) \neq 0.$$

Donc, il se peut qu'on observe  $|W_n(\omega)| > a$ .

On rejettera alors l'hypothèse  $H_0 = \{p = p_0\}$  à tort !

### Définition

$\mathbb{P}_{\{p=p_0\}}(|W_n| > a)$  est le **risque d'erreur de première espèce**.

On contrôle ce risque d'erreur en choisissant un seuil  $a = a(\alpha)$  tel que

$$\mathbb{P}_{\{p=p_0\}}(|W_n| > a(\alpha)) \simeq \alpha, \quad (\alpha \text{ proche de } 0).$$

### PROBABILITES

I – Modélisation d'une  
expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

II – Loi des grands  
nombres

Intuition  
Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

III – Théorème de  
Moivre-Laplace

Commentaires  
Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

IV – Intervalle de  
fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

V – Estimateur  
ponctuel

VI – Intervalle de  
confiance

VII – Test d'hypothèse  
Introduction

Construction du test

## Construction du test

Comment choisir le seuil  $a$  ?

- 1<sup>ère</sup> remarque : Supposons qu'en effet  $p = p_0$ , alors  $W_n = Z_n$ .  
 Cependant, quelle que soit le seuil  $a$ , si  $n \gg 1$ ,

$$\mathbb{P}_{\{p=p_0\}}(|W_n| > a) \neq 0.$$

Donc, il se peut qu'on observe  $|W_n(\omega)| > a$ .

On rejettera alors l'hypothèse  $H_0 = \{p = p_0\}$  à tort !

### Définition

$\mathbb{P}_{\{p=p_0\}}(|W_n| > a)$  est le **risque d'erreur de première espèce**.

On contrôle ce risque d'erreur en choisissant un seuil  $a = a(\alpha)$  tel que

$$\mathbb{P}_{\{p=p_0\}}(|W_n| > a(\alpha)) \simeq \alpha, \quad (\alpha \text{ proche de } 0).$$

En effet puisque  $n \gg 1$ ,

$$\mathbb{P}_{\{p=p_0\}}(|W_n| > a(\alpha)) = \mathbb{P}(|Z_n| > a(\alpha)) \simeq \mathbb{P}(|Z| > a(\alpha)), \quad \text{où } Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

### PROBABILITES

I – Modélisation d'une  
 expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

II – Loi des grands  
 nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
 faible des grands nombres

III – Théorème de  
 Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
 binomiale par la loi normale

IV – Intervalle de  
 fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

V – Estimateur  
 ponctuel

VI – Intervalle de  
 confiance

VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## Construction du test

Comment choisir le seuil  $a$  ?

- 1<sup>ère</sup> remarque : Supposons qu'en effet  $p = p_0$ , alors  $W_n = Z_n$ .  
Cependant, quelle que soit le seuil  $a$ , si  $n \gg 1$ ,

$$\mathbb{P}_{\{p=p_0\}}(|W_n| > a) \neq 0.$$

Donc, il se peut qu'on observe  $|W_n(\omega)| > a$ .

On rejettera alors l'hypothèse  $H_0 = \{p = p_0\}$  à tort !

### Définition

$\mathbb{P}_{\{p=p_0\}}(|W_n| > a)$  est le **risque d'erreur de première espèce**.

On contrôle ce risque d'erreur en choisissant un seuil  $a = a(\alpha)$  tel que

$$\mathbb{P}_{\{p=p_0\}}(|W_n| > a(\alpha)) \simeq \alpha, \quad (\alpha \text{ proche de } 0).$$

En effet puisque  $n \gg 1$ ,

$$\mathbb{P}_{\{p=p_0\}}(|W_n| > a(\alpha)) = \mathbb{P}(|Z_n| > a(\alpha)) \simeq \mathbb{P}(|Z| > a(\alpha)), \quad \text{où } Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Le seuil  $a(\alpha)$  est donc obtenu à partir des **tables de la loi Gaussienne standard** de telle sorte que

$$\mathbb{P}(|Z| > a(\alpha)) = \alpha.$$

### PROBABILITES

I – Modélisation d'une  
expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

II – Loi des grands  
nombres

Intuition  
Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

III – Théorème de  
Moivre-Laplace

Commentaires  
Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

IV – Intervalle de  
fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

V – Estimateur  
ponctuel

VI – Intervalle de  
confiance

VII – Test d'hypothèse  
Introduction

Construction du test

## Construction du test

Comment choisir le seuil  $a$  ?

- 1<sup>ère</sup> remarque : Supposons qu'en effet  $p = p_0$ , alors  $W_n = Z_n$ .  
 Cependant, quelle que soit le seuil  $a$ , si  $n \gg 1$ ,

$$\mathbb{P}_{\{p=p_0\}}(|W_n| > a) \neq 0.$$

Donc, il se peut qu'on observe  $|W_n(\omega)| > a$ .

On rejettera alors l'hypothèse  $H_0 = \{p = p_0\}$  à tort !

### Définition

$\mathbb{P}_{\{p=p_0\}}(|W_n| > a)$  est le **risque d'erreur de première espèce**.

On contrôle ce risque d'erreur en choisissant un seuil  $a = a(\alpha)$  tel que

$$\mathbb{P}_{\{p=p_0\}}(|W_n| > a(\alpha)) \simeq \alpha, \quad (\alpha \text{ proche de } 0).$$

En effet puisque  $n \gg 1$ ,

$$\mathbb{P}_{\{p=p_0\}}(|W_n| > a(\alpha)) = \mathbb{P}(|Z_n| > a(\alpha)) \simeq \mathbb{P}(|Z| > a(\alpha)), \quad \text{où } Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Le seuil  $a(\alpha)$  est donc obtenu à partir des **tables de la loi Gaussienne standard** de telle sorte que

$$\mathbb{P}(|Z| > a(\alpha)) = \alpha.$$

Exemple : pour  $\alpha = 0,05 = 5\%$ , le seuil est  $a(\alpha) = a(0,05) \simeq 1,96$ .

Simulations : [TestCabri2](#), [TestCabri2](#)

### PROBABILITES

I – Modélisation d'une  
 expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
 Schémas de Bernoulli

II – Loi des grands  
 nombres

Intuition  
 Démonstration de la loi  
 faible des grands nombres

III – Théorème de  
 Moivre-Laplace

Commentaires  
 Approximation de la loi  
 binomiale par la loi normale

IV – Intervalle de  
 fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
 Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

V – Estimateur  
 ponctuel

VI – Intervalle de  
 confiance

VII – Test d'hypothèse  
 Introduction

Construction du test

- Une fois le seuil  $a(\alpha)$  établi, le test est entièrement construit !

## PROBABILITES

### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

## STATISTIQUES

### V – Estimateur ponctuel

### VI – Intervalle de confiance

### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test



- Une fois le seuil  $a(\alpha)$  établi, le test est entièrement construit !  
Dans l'exemple précédent ( $n = 50$ ,  $F_n = 0, 3$ ,  $p_0 = 1/4$ ),

$$|W_n(\omega)| \simeq 0,82 \leq 1,96.$$

## PROBABILITES

### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité  
Schémas de Bernoulli

### II – Loi des grands nombres

Intuition  
Démonstration de la loi faible des grands nombres

### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires  
Approximation de la loi binomiale par la loi normale

### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons  
Fluctuation de la fréquence

## STATISTIQUES

### V – Estimateur ponctuel

### VI – Intervalle de confiance

### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

- Une fois le seuil  $a(\alpha)$  établi, le test est entièrement construit !

Dans l'exemple précédent ( $n = 50$ ,  $F_n = 0, 3$ ,  $p_0 = 1/4$ ),

$$|W_n(\omega)| \simeq 0,82 \leq 1,96.$$

Conclusion : Avec un risque d'erreur de première espèce de 5%, la proportion de bonbons dans l'urne est  $p = 1/4$ .

## PROBABILITES

### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi faible des grands nombres

### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi binomiale par la loi normale

### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

## STATISTIQUES

### V – Estimateur ponctuel

### VI – Intervalle de confiance

### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

- Une fois le seuil  $a(\alpha)$  établi, le test est entièrement construit !

Dans l'exemple précédent ( $n = 50$ ,  $F_n = 0, 3$ ,  $p_0 = 1/4$ ),

$$|W_n(\omega)| \simeq 0, 82 \leq 1, 96.$$

Conclusion : Avec un risque d'erreur de première espèce de 5%, la proportion de bonbons dans l'urne est  $p = 1/4$ .

- 2ème remarque : Supposons qu'en fait  $p \neq p_0$ ,

$$W_n = Z_n \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} + \sqrt{n} \frac{p - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}},$$

## PROBABILITES

### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi faible des grands nombres

### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi binomiale par la loi normale

### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

## STATISTIQUES

### V – Estimateur ponctuel

### VI – Intervalle de confiance

### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

## PROBABILITES

 I – Modélisation d'une  
 expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

 II – Loi des grands  
 nombres

Intuition

 Démonstration de la loi  
 faible des grands nombres

 III – Théorème de  
 Moivre-Laplace

Commentaires

 Approximation de la loi  
 binomiale par la loi normale

 IV – Intervalle de  
 fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

## STATISTIQUES

 V – Estimateur  
 ponctuel

 VI – Intervalle de  
 confiance

## VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

- Une fois le seuil  $a(\alpha)$  établi, le test est entièrement construit !

Dans l'exemple précédent ( $n = 50$ ,  $F_n = 0, 3$ ,  $p_0 = 1/4$ ),

$$|W_n(\omega)| \simeq 0,82 \leq 1,96.$$

Conclusion : Avec un risque d'erreur de première espèce de 5%, la proportion de bonbons dans l'urne est  $p = 1/4$ .

- 2ème remarque : Supposons qu'en fait  $p \neq p_0$ ,

$$W_n = Z_n \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} + \sqrt{n} \frac{p-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}},$$

et par conséquent, pour  $n \gg 1$ ,

$$\mathbb{P}_{p \neq p_0}(|W_n| \leq a(\alpha)) = \mathbb{P}(a_n \leq Z_n \leq b_n) \simeq \mathbb{P}(a_n \leq Z \leq b_n) \neq 0,$$

où

$$a_n = -a(\alpha) \frac{\sqrt{p_0(1-p_0)}}{\sqrt{p(1-p)}} - \sqrt{n} \frac{p-p_0}{\sqrt{p(1-p)}},$$

et

$$b_n = a(\alpha) \frac{\sqrt{p_0(1-p_0)}}{\sqrt{p(1-p)}} - \sqrt{n} \frac{p-p_0}{\sqrt{p(1-p)}}.$$

Puisque

$$\mathbb{P}_{p \neq p_0}(|W_n| \leq a(\alpha)) \neq 0,$$

on peut avoir observé que  $|W_n| \leq a(\alpha)$  alors que  $p \neq p_0$ ,

## PROBABILITES

### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

## STATISTIQUES

### V – Estimateur ponctuel

### VI – Intervalle de confiance

### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

Puisque

$$\mathbb{P}_{p \neq p_0}(|W_n| \leq a(\alpha)) \neq 0,$$

on peut avoir observé que  $|W_n| \leq a(\alpha)$  alors que  $p \neq p_0$ ,  
on a alors **accepté** l'hypothèse  $H_0 = \{p = p_0\}$

## PROBABILITES

### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

## STATISTIQUES

### V – Estimateur ponctuel

### VI – Intervalle de confiance

### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

Puisque

$$\mathbb{P}_{p \neq p_0}(|W_n| \leq a(\alpha)) \neq 0,$$

on peut avoir observé que  $|W_n| \leq a(\alpha)$  alors que  $p \neq p_0$ ,  
on a alors **accepté** l'hypothèse  $H_0 = \{p = p_0\}$  **à tort!**

## PROBABILITES

### I – Modélisation d'une expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

### II – Loi des grands nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

### III – Théorème de Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

### IV – Intervalle de fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

## STATISTIQUES

### V – Estimateur ponctuel

### VI – Intervalle de confiance

### VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

Puisque

$$\mathbb{P}_{p \neq p_0}(|W_n| \leq a(\alpha)) \neq 0,$$

on peut avoir observé que  $|W_n| \leq a(\alpha)$  alors que  $p \neq p_0$ ,  
on a alors **accepté** l'hypothèse  $H_0 = \{p = p_0\}$  **à tort !**

### Définition

$\mathbb{P}_{p \neq p_0}(|W_n| \leq a(\alpha))$  est le **risque d'erreur de seconde espèce**.

### PROBABILITES

I – Modélisation d'une  
expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

II – Loi des grands  
nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

III – Théorème de  
Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

IV – Intervalle de  
fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

V – Estimateur  
ponctuel

VI – Intervalle de  
confiance

VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test



Puisque

$$\mathbb{P}_{p \neq p_0}(|W_n| \leq a(\alpha)) \neq 0,$$

on peut avoir observé que  $|W_n| \leq a(\alpha)$  alors que  $p \neq p_0$ ,  
on a alors **accepté** l'hypothèse  $H_0 = \{p = p_0\}$  **à tort !**

### Définition

$\mathbb{P}_{p \neq p_0}(|W_n| \leq a(\alpha))$  est le **risque d'erreur de seconde espèce**.

**Remarque :** Le test est entièrement construit, on ne peut donc pas comme précédemment, contrôler ce risque d'erreur.

### PROBABILITES

I – Modélisation d'une  
expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

II – Loi des grands  
nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

III – Théorème de  
Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

IV – Intervalle de  
fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

V – Estimateur  
ponctuel

VI – Intervalle de  
confiance

VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

Puisque

$$\mathbb{P}_{p \neq p_0}(|W_n| \leq a(\alpha)) \neq 0,$$

on peut avoir observé que  $|W_n| \leq a(\alpha)$  alors que  $p \neq p_0$ ,  
on a alors **accepté** l'hypothèse  $H_0 = \{p = p_0\}$  **à tort!**

### Définition

$\mathbb{P}_{p \neq p_0}(|W_n| \leq a(\alpha))$  est le **risque d'erreur de seconde espèce**.

**Remarque :** Le test est entièrement construit, on ne peut donc pas comme précédemment, contrôler ce risque d'erreur. Cependant,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{p \neq p_0}(|W_n| \leq a(\alpha)) = 0,$$

### PROBABILITES

I – Modélisation d'une  
expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

II – Loi des grands  
nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

III – Théorème de  
Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

IV – Intervalle de  
fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

V – Estimateur  
ponctuel

VI – Intervalle de  
confiance

VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

Puisque

$$\mathbb{P}_{p \neq p_0}(|W_n| \leq a(\alpha)) \neq 0,$$

on peut avoir observé que  $|W_n| \leq a(\alpha)$  alors que  $p \neq p_0$ ,  
on a alors **accepté** l'hypothèse  $H_0 = \{p = p_0\}$  **à tort!**

### Définition

$\mathbb{P}_{p \neq p_0}(|W_n| \leq a(\alpha))$  est le **risque d'erreur de seconde espèce**.

**Remarque :** Le test est entièrement construit, on ne peut donc pas comme précédemment, contrôler ce risque d'erreur. Cependant,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{p \neq p_0}(|W_n| \leq a(\alpha)) = 0,$$

le risque diminue avec la taille de l'échantillon  $n$ .

### PROBABILITES

I – Modélisation d'une  
expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

II – Loi des grands  
nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

III – Théorème de  
Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

IV – Intervalle de  
fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

V – Estimateur  
ponctuel

VI – Intervalle de  
confiance

VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

Puisque

$$\mathbb{P}_{p \neq p_0}(|W_n| \leq a(\alpha)) \neq 0,$$

on peut avoir observé que  $|W_n| \leq a(\alpha)$  alors que  $p \neq p_0$ ,  
on a alors **accepté** l'hypothèse  $H_0 = \{p = p_0\}$  **à tort!**

### Définition

$\mathbb{P}_{p \neq p_0}(|W_n| \leq a(\alpha))$  est le **risque d'erreur de seconde espèce**.

**Remarque :** Le test est entièrement construit, on ne peut donc pas comme précédemment, contrôler ce risque d'erreur. Cependant,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{p \neq p_0}(|W_n| \leq a(\alpha)) = 0,$$

le risque diminue avec la taille de l'échantillon  $n$ .

En effet, quand  $n \rightarrow \infty$ ,

- si  $p > p_0$  alors

$$a_n = -a(\alpha) \frac{\sqrt{p_0(1-p_0)}}{\sqrt{p(1-p)}} - \sqrt{n} \frac{p-p_0}{\sqrt{p(1-p)}} \rightarrow -\infty,$$

$$b_n = a(\alpha) \frac{\sqrt{p_0(1-p_0)}}{\sqrt{p(1-p)}} - \sqrt{n} \frac{p-p_0}{\sqrt{p(1-p)}} \rightarrow -\infty,$$

### PROBABILITES

I – Modélisation d'une  
expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

II – Loi des grands  
nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

III – Théorème de  
Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

IV – Intervalle de  
fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

V – Estimateur  
ponctuel

VI – Intervalle de  
confiance

VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

Puisque

$$\mathbb{P}_{p \neq p_0}(|W_n| \leq a(\alpha)) \neq 0,$$

on peut avoir observé que  $|W_n| \leq a(\alpha)$  alors que  $p \neq p_0$ ,  
on a alors **accepté** l'hypothèse  $H_0 = \{p = p_0\}$  **à tort!**

### Définition

$\mathbb{P}_{p \neq p_0}(|W_n| \leq a(\alpha))$  est le **risque d'erreur de seconde espèce**.

**Remarque :** Le test est entièrement construit, on ne peut donc pas comme précédemment, contrôler ce risque d'erreur. Cependant,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{p \neq p_0}(|W_n| \leq a(\alpha)) = 0,$$

le risque diminue avec la taille de l'échantillon  $n$ .

En effet, quand  $n \rightarrow \infty$ ,

- si  $p > p_0$  alors

$$a_n = -a(\alpha) \frac{\sqrt{p_0(1-p_0)}}{\sqrt{p(1-p)}} - \sqrt{n} \frac{p-p_0}{\sqrt{p(1-p)}} \rightarrow -\infty,$$

$$b_n = a(\alpha) \frac{\sqrt{p_0(1-p_0)}}{\sqrt{p(1-p)}} - \sqrt{n} \frac{p-p_0}{\sqrt{p(1-p)}} \rightarrow -\infty,$$

- si  $p < p_0$  alors  $a_n \rightarrow +\infty$  et  $b_n \rightarrow +\infty$ .

### PROBABILITES

I – Modélisation d'une  
expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

II – Loi des grands  
nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

III – Théorème de  
Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

IV – Intervalle de  
fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

V – Estimateur  
ponctuel

VI – Intervalle de  
confiance

VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

Puisque

$$\mathbb{P}_{p \neq p_0}(|W_n| \leq a(\alpha)) \neq 0,$$

on peut avoir observé que  $|W_n| \leq a(\alpha)$  alors que  $p \neq p_0$ ,  
on a alors **accepté** l'hypothèse  $H_0 = \{p = p_0\}$  **à tort!**

### Définition

$\mathbb{P}_{p \neq p_0}(|W_n| \leq a(\alpha))$  est le **risque d'erreur de seconde espèce**.

**Remarque :** Le test est entièrement construit, on ne peut donc pas comme précédemment, contrôler ce risque d'erreur. Cependant,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{p \neq p_0}(|W_n| \leq a(\alpha)) = 0,$$

le risque diminue avec la taille de l'échantillon  $n$ .

En effet, quand  $n \rightarrow \infty$ ,

- si  $p > p_0$  alors

$$a_n = -a(\alpha) \frac{\sqrt{p_0(1-p_0)}}{\sqrt{p(1-p)}} - \sqrt{n} \frac{p-p_0}{\sqrt{p(1-p)}} \rightarrow -\infty,$$

$$b_n = a(\alpha) \frac{\sqrt{p_0(1-p_0)}}{\sqrt{p(1-p)}} - \sqrt{n} \frac{p-p_0}{\sqrt{p(1-p)}} \rightarrow -\infty,$$

- si  $p < p_0$  alors  $a_n \rightarrow +\infty$  et  $b_n \rightarrow +\infty$ .

Donc, lorsque  $p \neq p_0$  et  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\mathbb{P}_{p \neq p_0}(|W_n| \leq a(\alpha)) \simeq \mathbb{P}(a_n \leq Z \leq b_n) \rightarrow 0, \quad Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

### PROBABILITES

I – Modélisation d'une  
expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

II – Loi des grands  
nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

III – Théorème de  
Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

IV – Intervalle de  
fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

V – Estimateur  
ponctuel

VI – Intervalle de  
confiance

VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test

Puisque

$$\mathbb{P}_{p \neq p_0}(|W_n| \leq a(\alpha)) \neq 0,$$

on peut avoir observé que  $|W_n| \leq a(\alpha)$  alors que  $p \neq p_0$ ,  
on a alors **accepté** l'hypothèse  $H_0 = \{p = p_0\}$  **à tort!**

### Définition

$\mathbb{P}_{p \neq p_0}(|W_n| \leq a(\alpha))$  est le **risque d'erreur de seconde espèce**.

**Remarque :** Le test est entièrement construit, on ne peut donc pas comme précédemment, contrôler ce risque d'erreur. Cependant,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{p \neq p_0}(|W_n| \leq a(\alpha)) = 0,$$

le risque diminue avec la taille de l'échantillon  $n$ .

En effet, quand  $n \rightarrow \infty$ ,

- si  $p > p_0$  alors

$$a_n = -a(\alpha) \frac{\sqrt{p_0(1-p_0)}}{\sqrt{p(1-p)}} - \sqrt{n} \frac{p-p_0}{\sqrt{p(1-p)}} \rightarrow -\infty,$$

$$b_n = a(\alpha) \frac{\sqrt{p_0(1-p_0)}}{\sqrt{p(1-p)}} - \sqrt{n} \frac{p-p_0}{\sqrt{p(1-p)}} \rightarrow -\infty,$$

- si  $p < p_0$  alors  $a_n \rightarrow +\infty$  et  $b_n \rightarrow +\infty$ .

Donc, lorsque  $p \neq p_0$  et  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\mathbb{P}_{p \neq p_0}(|W_n| \leq a(\alpha)) \simeq \mathbb{P}(a_n \leq Z \leq b_n) \rightarrow 0, \quad Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Simulations : [TestCabri2](#)

### PROBABILITES

I – Modélisation d'une  
expérience aléatoire

Espaces de probabilité

Schémas de Bernoulli

II – Loi des grands  
nombres

Intuition

Démonstration de la loi  
faible des grands nombres

III – Théorème de  
Moivre-Laplace

Commentaires

Approximation de la loi  
binomiale par la loi normale

IV – Intervalle de  
fluctuation

Fluctuation d'échantillons

Fluctuation de la fréquence

### STATISTIQUES

V – Estimateur  
ponctuel

VI – Intervalle de  
confiance

VII – Test d'hypothèse

Introduction

Construction du test