



Notice d'utilisation des programmes `maillage_1d` et `maillage_2d`

1 Le programme `maillage_1d`

Le but de ce programme est de calculer une solution approchée au problème : trouver $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, avec $u(0) = u(1) = 0$, telle que, pour presque tout $x \in]0, 1[$, $-u''(x) = f(x)$ et

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]0, 1/3[, \\ 1 & \text{si } x \in]1/3, 2/3[, \\ 0 & \text{si } x \in]2/3, 1[. \end{cases}$$

La solution est donnée par :

$$u(x) = \begin{cases} x/6 & \text{si } x \in]0, 1/3[, \\ x(1-x)/2 - 1/18 & \text{si } x \in]1/3, 2/3[, \\ (1-x)/6 & \text{si } x \in]2/3, 1[. \end{cases}$$

On exécute le programme au moyen de la commande `python3 maillage_1d.py`.

1.1 Ajouter, enlever des noeuds au maillage

Avec le clic gauche de la souris, cliquer sur des points du segment $]0, 1[\times \{0\}$ (en vert dans la figure). Cela ajoute un noeud au maillage s'il n'y en avait pas, et l'enlève s'il y en avait un (on ne peut pas enlever les deux points extrêmes).

Le nombre de noeuds est limité à 20.

1.2 Calculer la solution approchée

En cliquant dans le rectangle "R" encadré en rouge, on obtient la solution approchée par éléments finis, continue et affine par morceaux dans le maillage.

L'erreur affichée est le maximum des écarts entre la solution exacte et la solution approchée aux milieux des mailles.

Quelle erreur minimale parviendrez-vous à obtenir ?

2 Le programme `maillage_2d`

Le but de ce programme est de calculer une solution approchée au problème : trouver $u : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$-\Delta u(x, y) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = f(x, y),$$

pour $(x, y) \in]0, 1[\times]0, 1[$, avec $u(x, y) = 0$ sur le bord et $f(x, y) = 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$. La solution est donnée par $u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$.

On exécute le programme au moyen de la commande `python3 maillage_2d.py`. Ce programme calcule la solution approchée par éléments finis, continue et affine par morceaux dans un maillage de triangles.

Deux figures s'ouvrent : la figure 1 sert à réaliser le maillage, la figure 0 affiche la solution calculée sur un maillage qui satisfait les critères suivants :

1. Les mailles sont des triangles définis par les trois noeuds situés à leurs sommets, ne comportant pas de noeuds sur les bords ni à l'intérieur.
2. Le domaine $]0, 1[\times]0, 1[$ doit être entièrement recouvert par les mailles du maillage.
3. Deux mailles différentes ne peuvent avoir en commun que leurs côtés ou leurs sommets.

En haut de la figure 1 sont données des informations sur le maillage en cours de constitution. Tant que “continuer” apparaît, le maillage n'est pas achevé et ne permet pas le calcul d'une solution approchée.

2.1 Ajouter ou enlever des noeuds au maillage

Avec le clic gauche de la souris, cliquer dans le carré $]0, 1[\times]0, 1[$. Cela ajoute un noeud au maillage s'il n'y en avait pas, et l'enlève s'il y en avait un (on ne peut pas enlever les quatre sommets du domaine).

Lorsque l'on enlève un noeud, les arêtes partant de ce noeud sont également enlevées.

Le nombre de noeuds est limité à 1000.

2.2 Ajouter ou enlever des arêtes au maillage

1. Avec le clic droit, sélectionner un noeud. Il est alors encadré par un petit rectangle bleu.
2. Lorsqu'un autre noeud est à nouveau sélectionné par un clic droit, l'arête joignant ce noeud avec le précédent noeud sélectionné est tracée. On peut ainsi tracer une ligne brisée entre les différents noeuds du maillage.
3. Si l'on clique de nouveau avec le clic droit sur un noeud sélectionné, il n'est plus sélectionné.
4. Si l'on trace une arête sur une arête existante, cela la supprime.

2.3 Déplacer un noeud du maillage

1. Avec le clic du milieu, sélectionner un noeud. Il est alors encadré par un petit rectangle rouge.
2. Cliquer avec le clic du milieu à l'endroit où vous voulez déplacer le noeud. Les arêtes partant de ce noeud sont conservées.

2.4 Calculer la solution approchée

En cliquant dans le rectangle “R” encadré en rouge, on obtient la solution approchée, sous réserve que le maillage de la figure 1 satisfasse les critères rappelés ci-dessus. Vous pouvez voir cette solution dans la figure 0 sous différents angles en maintenant le clic gauche sur un coin de la surface représentant la solution et en le déplaçant.

L'erreur affichée est le maximum des écarts entre la solution exacte et la solution approchée aux noeuds du maillage.

Quelle erreur minimale parviendrez-vous à obtenir ?