Autour des jeux de Nim

Atelier proposé par Antoine Meyer

Cet atelier est en grande partie tiré du cours de théorie des jeux de T. S. Ferguson, UCLA.

1 Introduction : un exemple simple

Voici un jeu simple à deux joueurs : on dispose d'un tas de 21 objets ou « jetons » identiques. Deux joueurs doivent, tour à tour, prélever entre 1 et 3 jetons. Le perdant est le joueur qui ne peut plus jouer (ou dit autrement, le gagnant est le joueur qui prend le dernier jeton).

Question : Peut-on décrire une stratégie permettant de garantir que l'un des deux joueurs (le premier à jouer ou son adversaire) gagne à tous les coups ? perde ? Et pour un nombre initial de jetons différent ?

On peut répondre à la question en partant du cas trivial à 0 jetons, et raisonner de proche en proche pour des tas plus grands. :

- Il est clair que s'il reste entre 1 et 3 objets, la partie peut être gagnée par le joueur suivant (celui dont c'est le tour de jouer) en prenant tous les jetons.
- Supposons qu'il reste 4 jetons. Quoi que joue le joueur suivant, il restera entre 1 et 3 jetons, donc par l'observation précédente, la situation à 4 jetons est perdante pour le joueur dont c'est le tour de jouer.
- Ainsi, s'il reste 5, 6 ou 7 jetons, le premier joueur peut gagner en amenant son adversaire à la situation à 4 jetons. Pour la même raison que précédemment la position à 8 jetons est perdante pour le premier joueur.
- En raisonnant de proche en proche, on peut ainsi déterminer que les positions 0, 4, 8, 12, 16 et 20 sont perdantes pour le joueur qui commence, toutes les autres étant gagnantes.

En particulier, la position 21 est gagnante pour le premier joueur. Le seul coup optimal (qui garantit la victoire) est de retirer un jeton pour se ramener à la position à 20 jetons.

Enfin, si l'on considère un nombre initial de jetons n quelconque, on peut facilement voir que le joueur qui commence peut gagner à coup sûr si n n'est pas un multiple de 4, et que son adversaire peut gagner à coup sûr sinon.

2 Jeux combinatoires

On définit ici plus précisément le type de jeux que l'on étudie, appelés *jeux combinatoires*. Il s'agit d'un jeu satisfaisant les conditions suivantes.

1. Le jeu se joue à deux joueurs.
2. Il existe un ensemble, en général fini, de positions possibles du jeu.

3. Les règles du jeu décrivent, pour chaque joueur et depuis chaque position, quels déplacements vers d'autres positions sont autorisés. Si les règles ne font pas de distinction entre les coups autorisés à chaque joueur depuis une position donnée, on parle de jeu *impartial*, dans le cas contraire de jeu *partisan*.
4. Les joueurs jouent à tour de rôle.
5. Le jeu se termine quand le joueur dont c'est le tour n'a plus aucun déplacement possible. Sous le mode de jeu *normal*, le dernier joueur a avoir joué gagne la partie. Sous le mode de jeu de *misère*, le joueur ayant joué en dernier perd.

Si la partie se poursuit indéfiniment, on déclare une partie nulle. Cependant, on ajoute souvent une condition supplémentaire (appelée *condition de terminaison*) permettant de garantir qu'il n'existe pas de partie nulle :

6. Le jeu se termine en un nombre de coups fini quels que soient les coups des deux joueurs.

Remarque : cette définition exclut les jeux ou intervient le hasard, et les jeux à information partielle, où une partie de la position du jeu est cachée à chaque joueur. Elle exclut aussi les jeux de type dames ou échecs, où les coups autorisés à chaque joueur sont différents.

3 Positions P, positions S

Revenons à l'exemple introductif. On a vu que les positions 0, 4, 8, 12, 16… sont les positions gagnantes pour le joueur qui vient de jouer. On parle de positions **P** (comme Précédent). Les autres positions sont gagnantes pour le joueur Suivant, on les appelle des positions **S**.

De manière plus générale, dans tout jeu combinatoire impartial satisfaisant la condition de terminaison, et sous le mode de jeu normal, la nature **P** ou **S** des positions obéit à la caractérisation suivante :

1. Toute position terminale est une position **P**.
2. Depuis toute position **S** on peut atteindre une position **P** en un coup.
3. Depuis toute position **P**, tous les coups amènent à une position **S**.

Dans ces jeux, on peut en principe déterminer la nature de chaque position par induction (éventuellement transfinie) sur l'ordre des positions pouvant apparaître au cours d'une partie, en partant des positions terminales (celles depuis aucun coup n'est possible). Il suffit pour cela d'étiqueter toutes les propositions terminales comme **P** (ou **S** dans un jeu de misère), et d'étiqueter itérativement les positions dont tous les successeurs sont déjà étiquetés, jusqu'à saturation :

- Si l'un des successeurs d'une position est marquée **P**, la marquer **S** ;
- Si tous les successeurs d'une position sont marqués **S**, la marquer **P**.

Illustration : graphe des positions du jeu de 21.

Question : déterminer les positions P et S dans le jeu de 21 joué selon le mode « misère ».

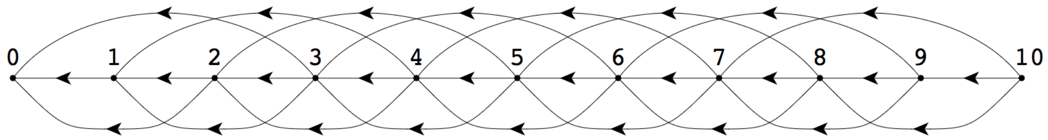

Figure 1: Portion du graphe du jeu de 21.

4 Jeu de soustraction

On considère maintenant une famille de jeux dont l'exemple précédent est un cas particulier. Soit S un ensemble d'entiers strictement positifs. Le jeu de soustraction défini par S est joué en partant d'un tas contenant un grand nombre n de jetons. Chaque joueur retire s jetons du tas, avec $s \in S$ (et bien sûr $s \leq n$). Le joueur qui joue en dernier gagne la partie.

Par exemple, le jeu décrit en introduction correspond à un jeu de soustraction avec $S = 1, 2, 3$ (et $n = 21$).

Question : Prenons $S = 1, 3, 4$. Pour quelles valeurs de n le premier joueur est-il certain de gagner ? De perdre ?

5 Le jeu de Nim ou « jeu de Marienbad »

On dispose à présent d'un certain nombre d'objets identiques répartis en n paquets, ou « piles », de diverses tailles $k_1, \ldots, k_n$. Deux joueurs jouent à tour de rôle. À chaque tour de jeu, le joueur prend un certain nombre (non nul) d'objets dans une seule pile de son choix, sans limite sur le nombre d'objets pris simultanément.

Ce jeu a été popularisé par le film d'Alain Resnais, *L'année dernière à Marienbad*, où il est joué (dans sa version "misère") avec quatre rangées de 1, 3, 5 et 7 allumettes respectivement. Les jeux de ce type ont été entièrement résolus par Charles Bouton dans un article de 1901.

Illustration : Jouez avec votre voisin une partie de jeu de Nim à trois piles de valeurs initiales 5, 7 et 9, selon le mode normal.

Question : (Commencer à…) Déterminer les positions P et S de cette version du jeu.

5.1 Analyse préliminaire

Il y a une et une seule position terminale, celle où toutes les piles sont vides. C'est donc une position P. Le jeu où une seule pile n'est pas vide est trivial : toutes ces positions sont des positions S (il suffit de retirer tous les objets).

Si deux piles ne sont pas vides, on peut facilement voir que les positions P sont celles où les deux piles contiennent le même nombre de jetons (et les positions S toutes les autres) : en effet depuis toute position de ce type n'importe quel coup amène à deux piles contenant un nombre de jetons différents, et réciproquement si le nombre de jetons dans les deux piles est différent, il suffit de retirer le bon nombre de jetons de la pile qui en contient le plus afin de les rendre à nouveau égaux (et éventuellement nuls).

Si trois piles contiennent au moins un jeton, la situation est plus compliquée. Clairement, si deux piles contiennent le même nombre de jetons, on est dans une position S car le joueur suivant peut amener le jeu dans une position à deux piles non nulles égales. C'est le cas par exemple des positions $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$ et $(1, 2, 2)$. La position $(1, 2, 3)$ est nécessairement une position P, car chaque coup depuis cette position amène à l'une des positions S précédemment décrites. Une étude attentive peut permettre de montrer que $(1, 4, 5)$ et $(2, 4, 6)$ sont des positions P, mais quelles sont les suivantes ? Et $(5, 7, 9)$ est-elle une position P ou S ? Et $(15, 23, 30)$?

5.2 Nim-somme

La nim-somme de deux nombres entiers positifs ou nuls a et b, notée $a \oplus b$, est leur addition chiffre à chiffre, sans retenue, en base deux. On parle aussi d'opération « ou exclusif ».

Par exemple $(10110)_2 \oplus (110011)_2 = (100101)_2$, autrement dit $22 \oplus 51 = 37$.

Cette opération est associative et commutative, et admet 0 comme identité. De plus, chaque nombre est son propre opposé, ce qui implique que la règle d'annulation s'applique : si $a \oplus b = a \oplus c$ alors $b = c$.

Cette opération a été utilisée par C. Bouton dans son article :

Théorème : Une position (x_1, x_2, x_3) du jeu de Nim à trois tas est une position P si et seulement si $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 = 0$.

On peut par exemple vérifier les observations précédentes, et constater que la position $(13, 12, 8)$ est une position S, car $13 \oplus 12 \oplus 8 = 9$.

Question : Déterminez un ou plusieurs coups optimaux depuis la position $(13, 12, 8)$ dans le jeu de Nim à trois piles, c'est à dire des coups amenant à une position P.

Ce théorème reste vrai quel que soit le nombre de piles utilisé !

5.3 Application en Python

On peut assez facilement programmer l'opération de nim-somme de deux nombres, et de là déterminer si une position quelconque donnée par une liste d'entiers est une position P ou S :

```python
def nim_somme(entiers):
    """Calcule la nim-somme d'une liste d'entiers positifs."""
    somme = 0
    for n in entiers:
        somme = somme ^ n  # ou exclusif sur chaque chiffre binaire
    return somme

def position_p(position):
    """Détermine si la liste d'entiers positifs donnée décrit une position P
    dans le jeu de Nim à len(position) piles."""
    return nim_somme(position) == 0
```

5.4 Démonstration du théorème

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble de positions de nim-somme 0, et $\mathcal{S}$ son complémentaire. On vérifie sur ces ensembles les trois conditions données ci- dessus sur les positions P et S.

1. *Toute position terminale est une position P.* Cette condition est triviale puisque $0 \oplus 0 \oplus \ldots = 0$.
2. *Depuis toute position **S** on peut atteindre une position **P** en un coup.* Soit i la place du chiffre le plus significatif de l'écriture en base deux de la nim-somme de la position courante. Autrement dit, dans l'écriture en base deux de chacun des nombres de jetons présents dans les tas, on trouve un nombre impair de 1 à la place i. Un coup optimal est obtenu en retirant à l'un de ces tas l'unique nombre de jetons qui permette de rendre la nim-somme nulle (ce qui est toujours possible car la colonne i correspond au chiffre le plus significatif de la nim-somme).
3. *Depuis toute position **P**, tous les coups amènent à une position **S**.* Depuis une position de nim-somme 0, changer le nombre d'objets dans un tas de x en x' change nécessairement la nim-somme, sinon par simplification on aurait $x = x'$.

On peut noter que le point 2 fournit une stratégie pour gagner à coup sûr depuis toute position S. On observe aussi que, depuis chaque position S, il existe autant de coups optimaux que de piles dont l'écriture binaire du nombre de jetons a un 1 en position i (qui est toujours un nombre impair).

5.5 Jeu en mode misère

Question : quelles sont les positions P et S du jeu de Nim à trois piles en mode misère ?

Il se trouve qu'on peut gagner en suivant la même stratégie que précédemment, jusqu'à une position où le nombre de tas à 2 jetons ou plus est de 1. Ensuite, il suffit de laisser à ce tas soit 0 jetons soit 1, de manière à ce que le nombre de tas à 1 jeton restants soit impair. Il est ensuite facile de vérifier qu'une telle position est une position P dans le jeu de misère.

6 Pour aller plus loin

Il est possible de généraliser les observations précédentes et le théorème de Bouton à des jeux plus généraux, notamment joués sur des graphes arbitraires (sous certaines conditions de terminaison).

Ceci mène en particulier à la notion de fonction de Sprague-Grundy d'un jeu, et au théorème de Sprague-Grundy, qui permet essentiellement de résoudre tout jeu exprimé comme la réunion de deux jeux impartiaux dont les fonctions de Sprague-Grundy sont connues. La démonstration de ce théorème est très semblable à celle du théorème de Bouton.

Pour aller plus loin, il faut considérer des jeux partiaux ou « partisans », qui à leur tour conduisent à une théorie plus large des jeux combinatoires.

Références

Charles L. Bouton. Nim, a game with a complete mathematical theory, *The annals of mathematics*, 2nd ser, Vol 3, No 1/4, 1901-1902. (pdf)

Thomas S. Ferguson. *Game Theory, Second Edition*, Mathematics Department, UCLA, 2014. (www)