Modéliser les fluctuations financières?

Thierry Jeantheau

Université Paris Est Marne–la–Vallée

15 Janvier 2015

Journée sur la modélisation

Ce dont nous ne parlerons pas !

L'exemple historique.

Problématique du producteur de blé du Midwest.

- Engagement des dépenses : Au moment des semences.
- Recette : Après la récolte.

Problème :

L'incertitude sur le prix de vente

Solution : Acheter une garantie de vendre à un prix K fixé.

Mécanisme de l'option d'achat.

Pour une option d'achat, on fixe

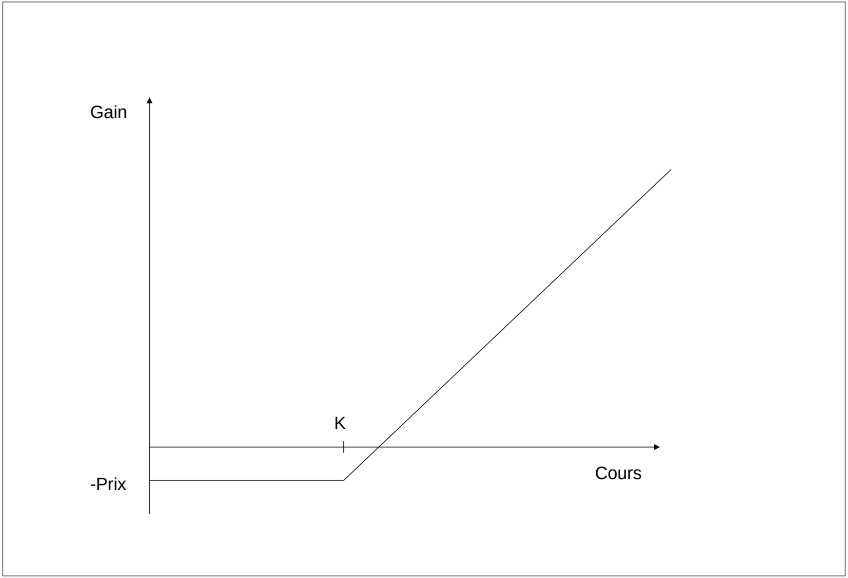
- La date à laquelle le contrat s'applique : La maturité T.
- Le prix auquel on peut effectuer l'achat : Le prix d'exercice K.

Exemple : J'ai le droit d'acheter à K=105 dans 2 mois.

A maturité, deux cas se présentent :

- Le prix est inférieur à K : Mon option ne sert à rien.
- Le prix est supérieur à K : J'exerce mon option.

Fonction de gain pour l'acheteur d'une option d'achat.



Principales hypothèses pour valoriser une option.

Hypothèses financières :

- Il existe un taux d'intérêt sans risque r.
- Il est possible de faire des ventes à découvert.
- Il n'y a pas de coût de transaction.
- Les transactions ont lieu en temps continu.
- Il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage.

Hypothèse de modélisation du cours.

Principe :

Il faut décrire l'évolution possible du prix S de l'actif.

- Pour n'importe quelle variation de temps Δ :

$$\log\left(\frac{S_{t+\Delta}}{S_t}\right) \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\Delta\,\gamma, \Delta\,\sigma^2\right)$$

- Remarque

$$\log\left(\frac{S_{t+\Delta}}{S_t}\right) \approx \frac{S_{t+\Delta} - S_t}{S_t}$$

Une équation différentielle stochastique.

Bachelier (début XXème siècle)

$$dS_t = \underbrace{\mu \, S_t \, dt}_{\text{Partie déterministe}} + \underbrace{\sigma \, S_t \, dB_t}_{\text{Partie aléatoire}} .$$

Paramètre fondamental : La volatilité σ

Il permet de régler l'intensité du bruit :

- σ faible : Peu d'aléa.
- σ fort : Beaucoup d'aléa.

Résultat fondamental.

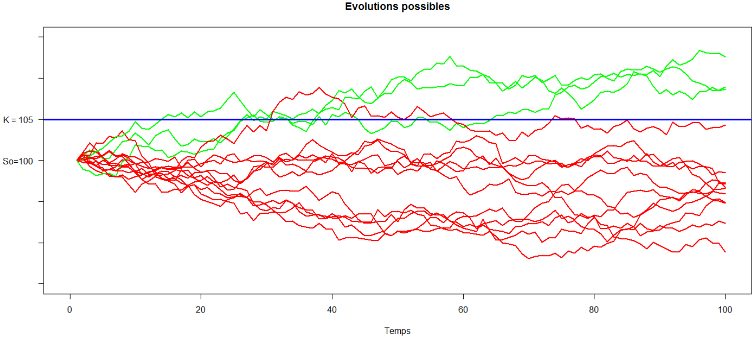
En supposant que $\mu = r$ (Absence d'opportunité d'arbitrage)

Prix d'un call :

$$E\left[e^{-r\,T}\,(S_T\ -\ K)^+\right]$$

• On peut approcher numériquement la valeur de cette espérance (Méthode de Monte Carlo)

Quelques trajectoires possibles.



Formule de Black and Scholes.

On peut calculer explicitement cette espérance !

Formule de Black and Scholes.

$$S_0\Phi(d) - Ke^{-rT}\Phi(d - \sigma\sqrt{T})$$

avec

$$d = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)$$

Deux remarques :

- Cette formule date de 1973 (prix Nobel en 1997)
- Le prix dépend essentiellement de la volatilité σ.
- Et est en bijection avec σ !

Un outil de spéculation.

- Variation du cours d'un actif

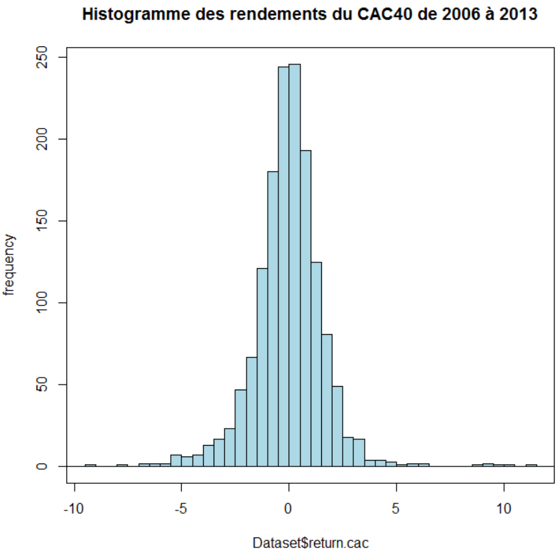
Un actif passe de 100 à 102 $\Longrightarrow$ Gain : 2%

- Variation du cours d'une option liée au même actif

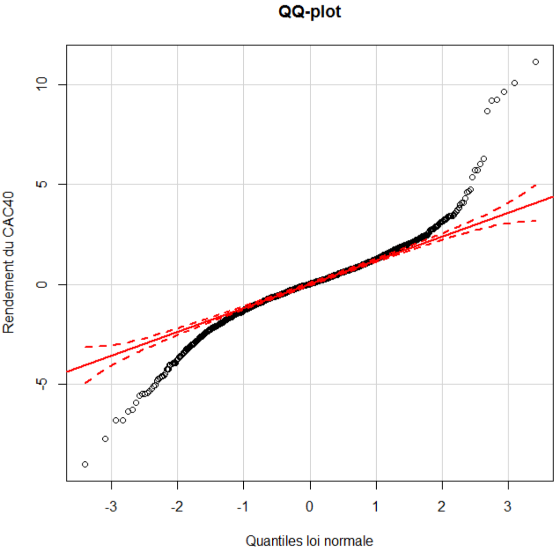
Exemple. Call 45 jours, prix d'exercice 105, volatilité (jour) 1.7%

Son prix passe de 2.50 à 3.22 $\Longrightarrow$ Gain : 29% ! ! !

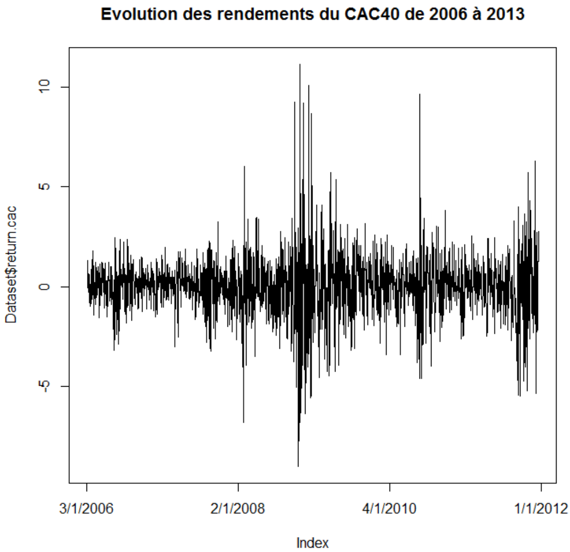
Que penser de l'hypothèse de modélisation ?



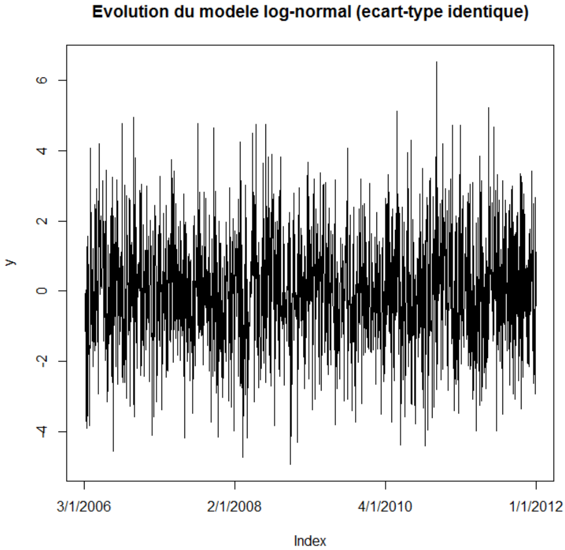
Graphique "Quantile contre Quantile".



Historique


Evolution des rendements du CAC40 de 2006 à 2013
Dataset$return.cac
10
5
0
-5
3/1/2006
2/1/2008
4/1/2010
1/1/2012
Index

Simulation



Evolution du modele log-normal (ecart-type identique)
y
6
4
2
0
-2
-4
3/1/2006
2/1/2008
4/1/2010
1/1/2012
Index

Modélisation ARCH (Engle, 1982).

On pose

$$Y_t \; = \; \log\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$$

Principe : La variance de Y_t n'est plus constante, mais dépend de son propre passé :

$$Y_t \; \hookrightarrow \; \mathcal{N}\left(\gamma, \sigma_t^2\right)$$

avec

$$\sigma_t^2 \; = \; \omega \; + \; \alpha \, Y_{t-1}^2$$

- Problème : Modèle encore trop simple !

Modélisation GARCH.

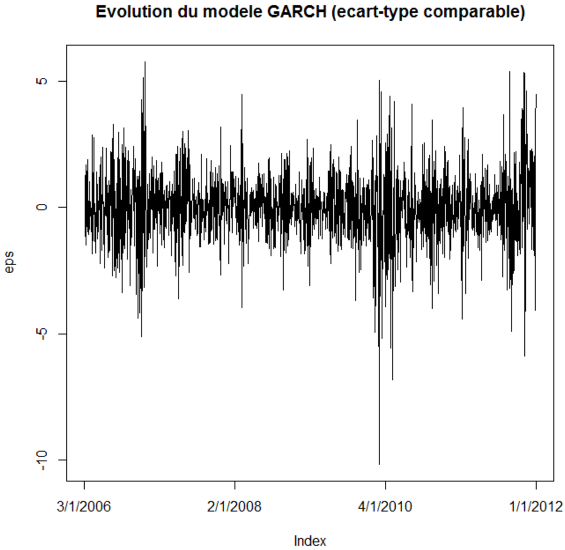
Principe : La variance de Y_t dépend aussi de son propre passé :

$$\sigma_t^2 \; = \; \omega \; + \; \alpha \, Y_{t-1}^2 \; + \; \beta \sigma_{t-1}^2$$

- Moralement

$$\sigma_t^2 \; = \; \omega \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \; + \; \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \, Y_{t-1-i}^2$$

Simulation



Evolution du modele GARCH (ecart-type comparable)
eps
5
0
-5
-10
3/1/2006
2/1/2008
4/1/2010
1/1/2012
Index

Le prix à payer !

- Modèle avec trois paramètres $\Longrightarrow$ Instabilité !
- Modèle en temps discret $\Longrightarrow$ Hypothèses de valorisation invalides !
- Modèle plus compliqué $\Longrightarrow$ Pas de formule exacte !

Conclusion.

- Complexité des modèles.

- Nécessité de bien comprendre et analyser la notion de risque.