# Quelques jeux et énigmes

Pierre-André Zitt

23 janvier 2018

Ce texte rassemble quelques énigmes mathématiques. Elles ont été présentées dans le cadre d'une journée de formation à l'UPEM pour les enseignants du secondaire.

Il est parfois difficile de trouver l'origine de telles énigmes ; mes sources personnelles pour celles-ci sont les suivantes.

— la page de probabilités et l'article Énigmes de D. Madore. Sur le même blog on trouve une variante encore plus surprenante du problème du mathématicien démoniaque dans ce billet.

— le blog de T. Khovanova qui rassemble de nombreuses énigmes de difficulté variée.

— L'article Seven Puzzles You Think You Must Not Have Heard Correctly de P. Winkler, qui indique une source pour le problème du mathématicien démoniaque.

— La page des 88 chapeaux pour une des variantes du problème des chapeaux.

Chaque énigme est déclinée en plusieurs encadrés qui donnent des indices successifs vers la solution, et des variantes possibles du problème.

**Des chapeaux 1 — énoncé**

Trois joueurs jouent au jeu suivant contre un meneur de jeu. Les joueurs ferment les yeux, et le meneur met sur la tête de chacun un chapeau noir ou blanc (avec probabilité $1/2$ à chaque fois). Chaque joueur peut voir la couleur des chapeaux des deux autres, mais pas celle de son propre chapeau.
Chaque joueur doit écrire secrètement sur un papier une prédiction sur la couleur de son chapeau, ou s'abstenir de répondre. Si un ou plusieurs joueurs se trompent, les joueurs perdent. Si aucun joueur ne fait de prédiction, les joueurs perdent également. Si au moins un joueur répond et si personne ne s'est trompé, les joueurs gagnent.

Quelle stratégie les joueurs peuvent-ils adopter pour avoir 3 chances sur 4 de gagner ?

**Des chapeaux 2 — un indice**

Quelle est la probabilité que les deux couleurs de chapeaux soient présentes ?

**Des chapeaux 3 — solution ; variante**

Chaque joueur répond « blanc » si il voit deux chapeaux noirs, « noir » si il voit deux chapeaux blancs, et rien si il voit des chapeaux de couleur différente.
Les configurations où il y a deux chapeaux d'une couleur et un de l'autre sont gagnantes.

**Variante** plus compliquée. Il y a maintenant $n$ joueurs et le meneur inscrit sur le chapeau de chacun un nombre entier entre $0$ et $n-1$ (il peut répéter le même nombre plusieurs fois). Chaque joueur fait une prédiction sur le nombre inscrit sur son chapeau. Les joueurs gagnent si au moins l'un d'entre eux fait une prédiction correcte.
Comment peuvent-ils être sûrs de gagner ?

**Des chapeaux 4 — solution de la variante**

Notons $a_i$ le nombre inscrit sur le chapeau du $i^e$ joueur. Le joueur $i$ calcule la somme $S_i$ des nombres qu'il voit sur les chapeaux des autres, et prédit pour son chapeau le nombre $i - S_i \mod n$.

Pour voir que cette stratégie fonctionne, on note $S$ la somme des $a_i$, donc le joueur $i$ voit sur les autres chapeaux la somme $S_i = S - a_i$. Il annonce donc $i + a_i - S \mod n$, et répond juste si et seulement si ceci vaut $a_i$, donc si et seulement si $S \equiv i[n]$. Les joueurs sont donc certains que (exactement) l'un d'entre eux va donner la bonne réponse (celui dont le numéro est donné par $S \mod n$).

## Les enveloppes 1 — énoncé

Deux nombres entiers distincts entre 1 et 7 sont inscrits sur des papiers cachés dans 2 enveloppes. Vous pouvez choisir et ouvrir une de ces enveloppes et regarder le nombre inscrit dedans. Vous devez ensuite décider si vous conservez cette enveloppe ou si vous prenez l'autre. Ce choix est définitif. Vous gagnez si l'enveloppe que vous choisissez à la fin est celle qui contient le plus grand nombre.
Vous disposez d'un dé. Pouvez-vous trouver une stratégie qui vous permet de gagner avec une probabilité $1/2$ ? Avec une probabilité strictement supérieure à $1/2$ ?

## Les enveloppes 2 — indice

Comparer le résultat du dé avec le chiffre inscrit sur l'enveloppe ouverte.

## Les enveloppes 3 — stratégie

Soit $a < b$ les entiers inscrits dans les enveloppes. On choisit la première enveloppe à ouvrir au hasard (pour neutraliser toute stratégie du joueur adverse). On note $E$ le nombre inscrit dans l'enveloppe que l'on ouvre et $X$ le résultat du dé. On change d'enveloppe si et seulement si $E \leq X$.
Quelle est la probabilité de gagner ?

## Les enveloppes 4 — Solution et variantes

On gagne si $E = a$ et qu'on change d'enveloppe, ou si $E = b$ et qu'on ne change pas. La probabilité de gain vaut :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left[(E = a \text{ et } E \leq X) \text{ ou } (E = b \text{ et } E > X)\right] \\
&\quad = \mathbf{P}\left[E = a \text{ et } a \leq X\right] + \mathbf{P}\left[E = b \text{ et } b > X\right] \\
&\quad = \mathbf{P}\left[E = a\right]\mathbf{P}\left[a \leq X\right] + \mathbf{P}\left[E = b\right]\mathbf{P}\left[b > X\right] \\
&\quad = (1/2)\mathbf{P}\left[a \leq X\right] + (1/2)\mathbf{P}\left[X < b\right] \\
&\quad = (1/2)\mathbf{P}\left[a \leq X\right] + (1/2)\mathbf{P}\left[X < a\right] \\
&\qquad + (1/2)\mathbf{P}\left[a \leq X < b\right] \\
&\quad = 1/2 + (1/2)(\mathbf{P}\left[X = a\right] + \cdots + \mathbf{P}\left[X = b - 1\right]) \\
&\quad \geq 1/2 + 1/12.
\end{aligned}$$

**Variantes :** que proposer si les nombres dans les enveloppes peuvent être des réels (distincts) quelconques ? Si les deux nombres sont un réel $x > 0$ quelconque et son « double » $2x$, et qu'on veut maximiser l'espérance du gain ?

### Les enveloppes 5 — Discussion des variantes

Si les nombres peuvent être des réels quelconques, on peut pour adapter la stratégie tirer un réel $X$ suivant une loi dont le support est $\mathbb{R}$, par exemple suivant la loi normale. On change d'enveloppe si $X \geq E$.
Le même calcul que précédemment donne une probabilité de gain :

$$1/2 + (1/2)\mathbf{P}\left[a \leq X < b\right] > 1/2.$$

Notons que cette probabilité est bien strictement supérieure à $1/2$, mais peut en être arbitrairement proche (suivant les choix de $a$, $b$).

Pour l'autre variante, choisir l'enveloppe au hasard conduit à un gain moyen

$$\mathbf{E}\left[E\right] = (1/2)x + (1/2)(2x) = 3x/2.$$

Si on applique la même statégie qu'au dessus, on trouve une espérance de gain de

$$(3x/2) + (x/2)\mathbf{P}\left[X \in [x, 2x]\right] > 3x/2.$$

### Le mathématicien démoniaque 1 — énoncé

Un mathématicien démoniaque a capturé 100 enseignants de mathématiques et les soumet à une épreuve non moins démoniaque. Il a rempli 100 enveloppes en mettant dans chacune le nom d'un des enseignants, et disposé ces enveloppes les unes à côté des autres dans une pièce. Chaque enseignant, successivement, devra entrer dans la pièce, et aura le droit d'ouvrir (au plus) 50 enveloppes. Après chaque passage, le mathématicien démoniaque remettra la pièce exactement dans le même état ; il empêchera également toute communication entre les enseignants après le début de l'épreuve.
Si **chaque** enseignant ouvre l'enveloppe qui contient son propre nom, alors les enseignants sont tous libérés. Sinon, ils sont tous condamnés à revivre (éternellement ?) leur journée de formation à l'UPEM.
Les enseignants peuvent se concerter avant de commencer l'épreuve. Quelle stratégie adopter pour s'échapper avec une probabilité non ridiculement faible ?

### Le mathématicien démoniaque 2 — un cas plus simple

On fait les deux hypothèses simplificatrices suivantes :

1. le mathématicien démoniaque choisit au hasard (uniformément) l'ordre dans lequel les enveloppes sont disposées ;
2. Il n'y a que deux enseignants et chacun peut ouvrir une boîte.

Quelle stratégie adopter ?

Que faire si il y a quatre enseignants qui peuvent ouvrir chacun deux boîtes ?

### Le mathématicien démoniaque 3 — stratégie pour 4 enseignants

Pour quatre enseignants : les enseignants se numérotent par ordre alphabétique. Quand il entre dans la pièce, l'enseignant $i$ ouvre l'enveloppe $i$ et y trouve le nom numéro $j$. Si $j = i$ l'enseignant ressort, sinon il ouvre l'enveloppe $j$.
Parmi les 24 dispositions possibles des noms, pour lesquelles cette stratégie permet-elle au premier enseignant de retrouver son nom ? Quelle est la probabilité que tout le monde retrouve son nom ?
En gardant (éventuellement) la première hypothèse, comment généraliser cette stratégie ? Comment calculer la probabilité de gain correspondante ?

### Le mathématicien démoniaque 4 — la stratégie générale

Pour $i$ entre 1 et 100 on note $\sigma(i)$ le numéro correspondant au nom dans la boîte $i$, et $A_i$ l'événement « l'enseignant $i$ trouve son nom ».
On reprend la stratégie précédente : l'enseignant $i$ ouvre la boîte $i$, puis la boîte $\sigma(i)$, puis la boîte $\sigma(\sigma(i))$, ..., jusqu'à avoir trouvé son nom (ou avoir ouvert 50 boîtes).
Calculer la probabilité de $A_i$, puis la probabilité que tout le monde retrouve son nom (on pourra se demander à quoi cet événement correspond pour la permutation $\sigma$).

### Le mathématicien démoniaque 5 — solution

L'enseignant $i$ trouve son nom si et seulement si, dans la permutation $\sigma$, le cycle partant de $i$ a une longueur inférieure à 50. La probabilité qu'il ne le trouve pas est $(99/100)(98/99)\cdots(50/51) = 1/2$ : pour chaque $i$ on a donc $\mathbf{P}[A_i] = 1/2$.
L'idée magique est que la stratégie assure que les $A_i$ ne sont **pas** indépendants : si ils l'étaient (stratégie naïve) la probabilité de succès serait $(1/2)^{100}$...
Ici la probabilité que tous retrouvent leur noms est la probabilité que dans une permutation prise au hasard, le cycle le plus long sont de longueur inférieure ou égale à 50. Pour $k > 50$, la probabilité que le plus long cycle soit de longueur exactement $k$ vaut $1/k$ (pour choisir une telle permutation, on a $\binom{n}{k}$ choix pour les éléments de ce long cycle, $(k-1)!$ façons de choisir l'ordre cyclique sur ces éléments, $(n-k)!$ façons de choisir une permutation arbitraire des $n-k$ autres éléments).
La probabilité d'échec vaut donc $\sum_{k=51}^{100}(1/k)$. Plus généralement avec $n$ enseignants on obtient $\sum_{k>n/2} 1/k \approx \ln(n) - \ln(n/2) \approx \ln(2) \approx 0.69$, soit plus de 30% de chances de succès !

### Le retour du matheux démoniaque 1 — énoncé

Le mathématicien démoniaque n'a pas tenu sa promesse et soumet les enseignants à une nouvelle épreuve. Après leur avoir laissé le temps de se concerter, il les isole chacun dans une chambre. Chaque jour, il emmène un enseignant pris au hasard dans une pièce contenant une lampe à interrupteur, qui est éteinte au début de l'épreuve. L'enseignant peut, si il le souhaite, manipuler l'interrupteur. Entre deux passages, le mathématicien démoniaque ne touche pas à la lampe.
Si un des enseignants, un jour, acquiert la certitude que tous sont passés au moins une fois dans la pièce, il peut l'annoncer et obtenir leur libération. Si il se trompe les enseignants sont condamnés à revivre éternellement leur journée de formation à l'UPEM.
Quelle stratégie adopter pour sortir un jour, sûrement, des griffes du mathématicien démoniaque ?
Votre stratégie est-elle encore valable si le mathématicien démoniaque est libre de l'ordre des passages, sous la contrainte que chaque enseignant passe une infinité de fois dans la pièce ?

### Le retour du matheux démoniaque 2 — deux idées

Une première stratégie probabiliste possible est d'attendre un nombre fixé de jours, suffisamment grand, et de faire l'annonce après ce nombre de jours. Cette stratégie ne garantit pas de sortir avec probabilité 1, et en cas de libre choix de l'ordre, la probabilité de gain peut être arbitrairement faible.
Une seconde possibilité est de donner à chacun un numéro $i$, puis de décider que : si un enseignant voit la lumière allumée, il l'éteint ; si il voit la lumière éteinte, il l'allume si et seulement si le numéro du jour est congru à $i$ modulo 100.
Ainsi, un enseignant qui trouve la lumière allumée le jour 51 sait que l'enseignant numéro 50 vient de passer. Au bout d'un temps astronomique, l'un des enseignants saura que tous les autres sont passés et les libèrera tous.
Cette stratégie ne fonctionne pas si le mathématicien choisit l'ordre.

**Le retour du matheux démoniaque 3 — une solution robuste**

L'un des enseignants est désigné chef. Lui seul pourra éteindre la lumière. Les autres enseignants ne font rien si ils trouvent la lumière allumée. Si ils trouvent la lumière éteinte et qu'ils ne l'ont encore jamais allumée, ils l'allument.
Le chef déclare que tous sont passés quand il a éteint 99 fois la lumière.