# Le Saut de Felix Baumgartner

David Doyen - Olivier Sester

Université Paris Est-Marne la Vallée

15 janvier 2014

Figure 1 : Felix Baumgartner, quelques instants après avoir sauté de sa capsule. Photo : Jay Nemeth.

# Objectif de l'atelier

1. Proposer différentes modélisations pour le calcul de la vitesse de Baumgartner.
2. Résoudre numériquement avec le logiciel Scilab.
3. Les résultats numériques sont-ils cohérents avec les mesures du saut ? Quelle est l'altitude de départ minimum permettant de franchir le mur du son ?

La physique du système est donnée par le principe fondamental de la dynamique.
Si $m$ est la masse du parachutiste :

$$m \underbrace{\vec{a}}_{\text{accélération}} = \underbrace{\sum \vec{F}_{ext}}_{\text{somme des forces extérieures}}$$

Ici le problème est unidimensionnel, la chute s'effectue le long d'un axe vertical.
L'accélération est la dérivée du vecteur vitesse : $a = \frac{dv(t)}{dt}$.

Toute notre discussion va reposer sur la nature des forces extérieures !

# Prise en compte des frottements de l'air

Plusieurs modélisations sont envisageable pour les frottements :

1. Aucun frottement : les forces extérieures se réduisent au poids du parachutiste :

$$\frac{dv(t)}{dt} = -g$$

   Déterminer la solution exacte ? Pourquoi n'est-ce pas réaliste ?

2. A petite vitesse, la force de frottement dépend linéairement de la vitesse : $kv$. Déterminer explicitement la solution ?
3. A grande vitesse la force de frottement dépend quadratiquement de la vitesse : $kv^2$

# Prise en compte des frottements de l'air

Plusieurs modélisations sont envisageable pour les frottements :

1. Aucun frottement : les forces extérieures se réduisent au poids du parachutiste :
$$\frac{dv(t)}{dt} = -g$$
Déterminer la solution exacte ? Pourquoi n'est-ce pas réaliste ?
2. A petite vitesse, la force de frottement dépend linéairement de la vitesse : $kv$. Déterminer explicitement la solution ?
3. A grande vitesse la force de frottement dépend quadratiquement de la vitesse : $kv^2$

# Prise en compte des frottements de l'air

Plusieurs modélisations sont envisageable pour les frottements :

1. Aucun frottement : les forces extérieures se réduisent au poids du parachutiste :
$$\frac{dv(t)}{dt} = -g$$
Déterminer la solution exacte ? Pourquoi n'est-ce pas réaliste ?
2. A petite vitesse, la force de frottement dépend linéairement de la vitesse : $kv$. Déterminer explicitement la solution ?
3. A grande vitesse la force de frottement dépend quadratiquement de la vitesse : $kv^2$

# Les frottements de l'air

Les forces de frottements exercées par un fluide de masse volumique $\rho$ sur une surface $S$ s'exprime comme

$$F = \frac{1}{2} S C_x \rho v^2$$

où
- $v$ est la vitesse du solide
- $C_x$ le coefficient de trainée (sans unité)
- $S$ la surface du solide selon une direction perpendiculaire à la vitesse.

La vitesse vérifie une équation différentielle non-linéaire d'ordre 1 :

$$v'(t) = -g + \frac{1}{2m} S C_x \rho v^2$$

Pour résoudre le problème de Cauchy :

$$(E)\ \begin{cases} v'(t) = f(v), & \text{pour } t \in [0, T] \\ v(0) = v_{ini}. \end{cases}$$

Si $h = \frac{T}{N}$, on se donne la subdivision de $[0, T]$ de pas $h$ :
$t_0 = 0,\ t_1 = h, \dots t_i = ih, \dots, t_N = T$.
La méthode d'Euler consiste à approcher la solution de $(E)$ uniquement aux valeurs $t = t_i$. On utilise :

$$\begin{cases} v_0 = v_{ini} \\ v_{i+1} = v_i + hf(v_i) \ \text{ pour } i = 1 \dots N \end{cases}$$

# La méthode d'Euler

Pour l'équation de la chute libre $v'(t) = -g + \frac{1}{2m} SC_x \rho v^2$ avec $v(0) = 0$ on obtient donc :

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{i+1} = v_i + h(-g + \frac{1}{2m} SC_x \rho v_i^2) \;\; \text{pour } i = 1, \ldots, N \end{cases}$$

**Theorem**

*Si $f$ est de classe $C^1$ alors la méthode d'Euler est convergente et est d'ordre 1.*

Travail Proposé :

En supposant dans un premier temps que $C_x$ et $\rho$ sont des constantes,
Construire avec Scilab, le graphe de la fonction $t \mapsto v(t)$.

Comparer avec la solution exacte.

Les valeurs numériques que l'on pourra prendre :

$$m = 110kg$$
$$S = 0.4m^2$$
$$g = 9.6$$
$$C_x = 1.3$$

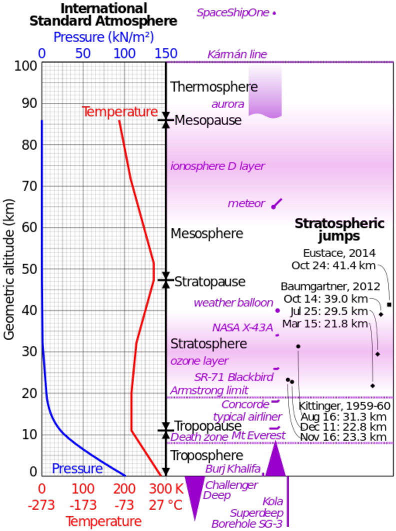


Figure 2 : Modèle standard de l'atmosphère (Wikipedia).

# Un modèle plus réaliste

Pour prendre en compte les variations de $\rho$ nous allons d'écrire le modèle standard de l'atmosphère :

| i | Nom | $Z_i$ (en m) | $T_i$ (en K) | $a_i$ (en K/m) | $p_i$ (en Pa) |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | Troposphère | 0 | 288.15 | -0.0065 | 101325 |
| 1 | Tropopause | 11000 | 216.65 | 0.0 | 22632.1 |
| 2 | Stratosphère | 20000 | 216.65 | 0.001 | 5474.89 |
| 3 | Stratosphère | 32000 | 228.65 | 0.0028 | 868.019 |

Table 1 : Description des différentes couches du modèle d'atmosphère

L'altitude géopotentielle correspondant à l'altitude $z$ est

$$Z = \frac{zR_{Terre}}{z + R_{Terre}},$$

où $R_{Terre}$ est le rayon de la Terre.

# Un modèle plus réaliste

Dans la couche $i$, la température à l'altitude géopotentielle $Z$ vaut

$$T(Z) = T_i + a_i(Z - Z_i).$$

Si la température dans couche $i$ est constante, la pression à l'altitude géopotentielle $Z$ dans cette couche vaut

$$p(Z) = p_i \exp\left(-\frac{g_0}{RT}(Z - Z_i)\right).$$

Si la température dans couche $i$ varie linéairement, la pression à l'altitude géopotentielle $Z$ dans cette couche vaut

$$p(Z) = p_i \left(\frac{T}{T_i}\right)^{-g_0/(a_i R)}.$$

La densité de l'atmosphère est donnée par la loi des gaz parfaits :

$$\rho(z) = \frac{p(z)}{RT(z)}.$$

où $R$ est la constante spécifique de l'air.
La fonction $z \mapsto \rho(z)$ est donc une fonction de l'altitude que l'on peut calculer indépendamment du mouvement.
L'équation du parachutiste devient donc un système différentiel à 2 équations en $z(t)$ et $v(t)$ :

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} v'(t) = -g + \frac{1}{2m} SC_x \rho(z) v(t)^2, \\ z'(t) = z(t); \\ z(0) = z_{ini}; \\ v(0) = 0. \end{array} \right.$$

- Ecrire une fonction `chute` qui simule la chute d'un corps dans l'atmosphère.
- Paramètres d'entrée : longueur du pas de temps `h`, altitude initiale `zini`, masse du corps `m`, coefficient de traînée `Cx` et surface de référence `S`
- Sortie : graphes de l'altitude en fonction du temps, de la vitesse en fonction du temps, et de la vitesse du son en fonction de l'altitude : A la température $T$ le son se déplace à la vitesse :

$$c_S = \sqrt{1.4RT}.$$

- Le nombre de pas de temps ne sera pas fixé à l'avance ; la simulation sera arrêtée quand l'altitude deviendra négative. Une fonction `atmosphere` donnant les principaux paramètres de l'atmosphère en fonction de l'altitude est fournie.
- Paramètres pour le saut de Baumgartner : `zini`=38 969, `m`=110, `Cx`=1.3, `S`=0.4

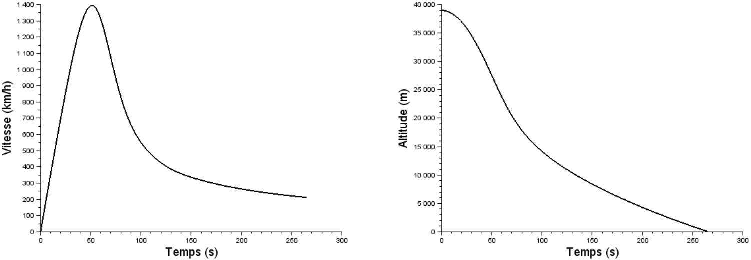


Figure 3 : Vitesse et altitude simulées de Baumgartner en fonction du temps.

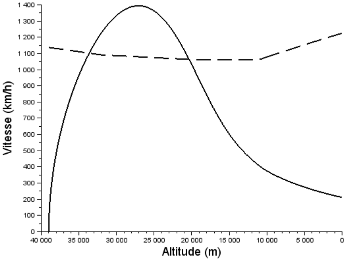


Figure 4 : Vitesse simulée de Baumgartner (trait continu) et vitesse du son (trait interrompu) en fonction de l'altitude.

- Les résultats numériques sont-ils cohérents avec les mesures du saut ?

| Temps (en s) | Altitude (en m) | Vitesse (en km/h) |
|---|---|---|
| 0 | 38 969 | 0 |
| 34 | 33 446 | 1 115 |
| 50 | 27 833 | 1 358 |
| 64 | 22 961 | 1 043 |
| 180 | 7 619 | 285 |
| 260 | 2 567 | 192 |

Table 2 : Mesures effectuées lors du saut de Baumgartner.

- Quelle était l'altitude nécessaire pour franchir le mur du son ?

- Variation de $g$ en fonction de l'altitude ?
- Variation de $C_x$ en fonction de la vitesse ?