

Une balade mathématico-informatique

Thierry Jeantheau

Université Paris Est Marne-la-Vallée

17 Janvier 2017

Remerciements

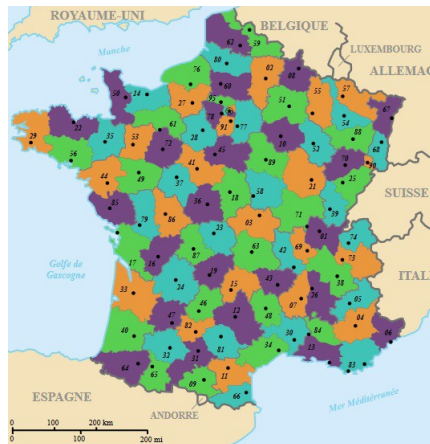
- Antoine Valabregue
- Michel Roussignol
- Robert Eymard
- Antoine Meyer
- et les organisateurs de cette journée !

L'homme par qui tout commence...

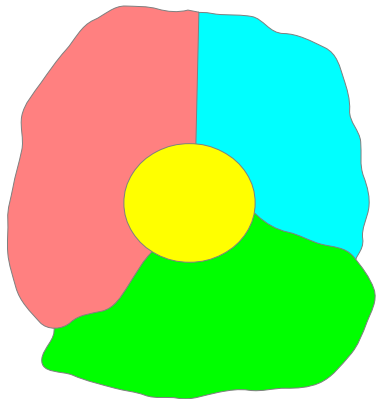


Francis Guthrie (1831-1899)

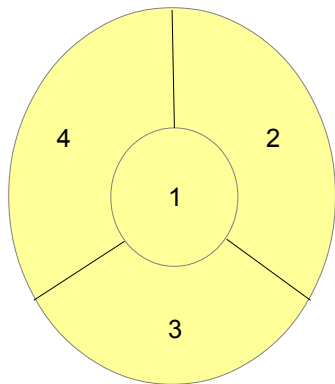
Déjà en France!



4 couleurs sont nécessaires



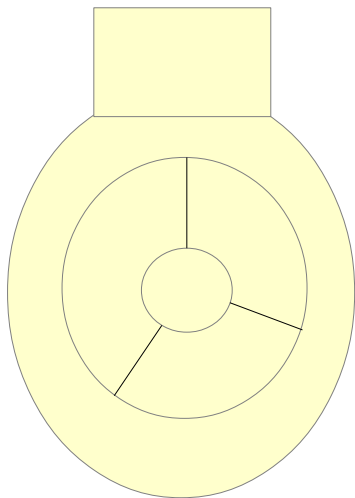
ou encore



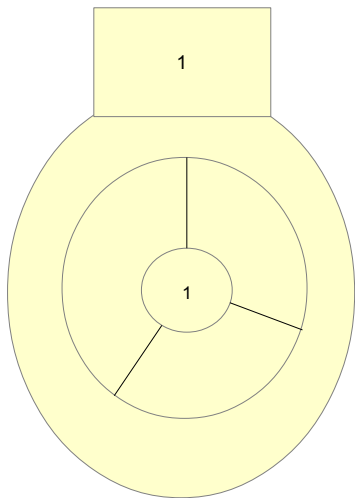
Quelques dates

- 1852 : Conjecture par Francis Guthrie
- 1879-1880 : Premières "démonstrations"
- 1890 : Théorème des cinq couleurs
- 1976 : Démonstration par Appel et Hanken

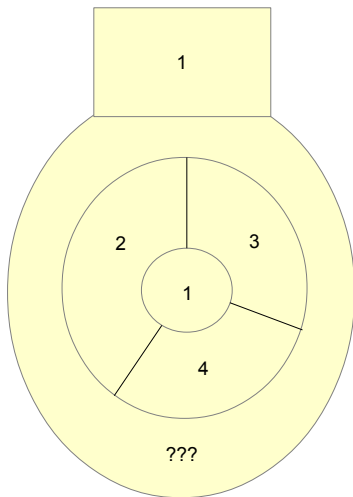
Comment colorier cette carte ?



Si on s'y prend mal...



...pas de solution !



Algorithme de "brute forcing"

Quelques calculs sur l'exemple de la France

- Nombre d'opérations à effectuer

$$\frac{4^{95} * 236}{20} = 1.85 \cdot 10^{58}$$

- Ordinateur : Environ 200 milliards d'opérations à la seconde
- Temps de calcul de l'algorithme

$3 \cdot 10^{39}$ années!!!

Un autre argument : L'écologie !

Algorithme de "Backtracking"

Code couleur : 1,2,3,4.

Ordre de visite : Suivant le numéro de département.

Point de départ : Tous les départements à 0 (pas de couleur)

Puis successivement pour chaque département :

- 1 Incrémenter de 1 sa couleur i .
- 2 Si $i = 5$, faire $i = 0$ et revenir au département précédent.
- 3 Sinon, étudier les conflits avec les départements voisins.
- 4 Pas de conflit, passer au département suivant.
- 5 Si conflit, revenir à l'étape 1.

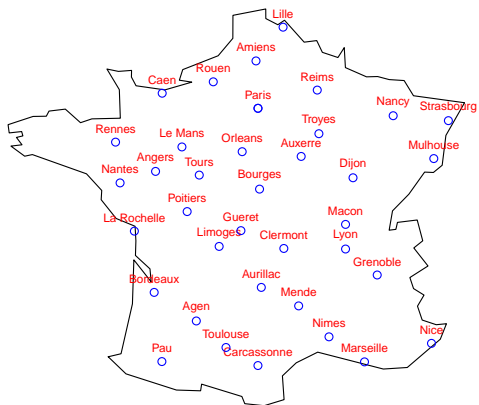
Reformulation du problème

On définit la fonction φ

$$\begin{aligned} \varphi : \{1, 2, 3, 4\}^{95} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ \text{config} &\longrightarrow \#\{\text{Conflits avec } \text{config}\} \end{aligned}$$

Trouver le minimum de φ (c'est 0!!!) sur l'espace (discret, mais grand) des *config* possibles!

Quel est le trajet le plus court?



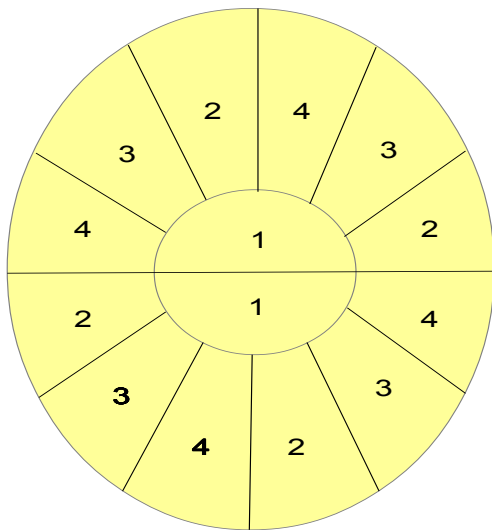
L'algorithme de Robert Eymard

Point de départ : Attribuer au hasard une couleur à tous les départements.

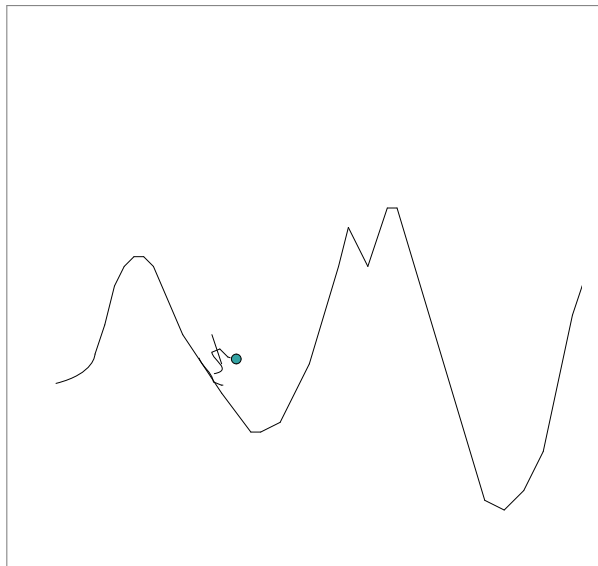
Itérations :

- 1 Tirer au hasard un département.
- 2 Lui attribuer la couleur qui minimise le nombre de conflit avec ses voisins (tirer au hasard uniformément si plusieurs solutions sont possibles).
- 3 Recommencer jusqu'à convergence...

Contre exemple de convergence !



Le piège des minima locaux!



Algorithme de Metropolis et du recuit simulé

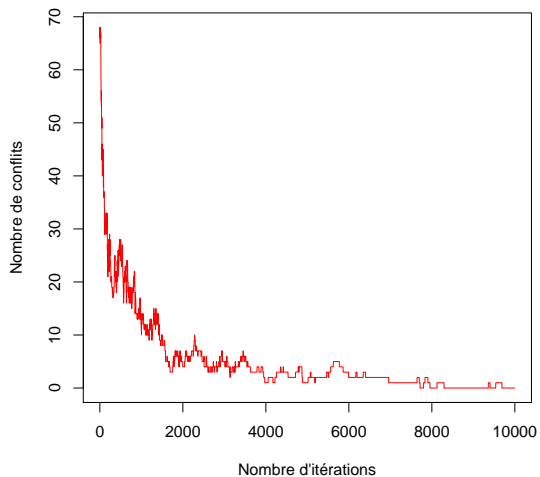
- Idée : Laisser faire le hasard un peu plus !

Point de départ : Attribuer au hasard une couleur à tous les départements.

Itérations :

- 1 Tirer au hasard un département.
 - 2 Lui attribuer une couleur suivant une probabilité P_i , où i désigne l'itération courante de l'algorithme.
 - 3 Recommencer jusqu'à convergence...
- Pour i petit, P_i ne favorisera pratiquement aucune couleur.
 - Au fur et à mesure que i croit, P_i favorisera de plus en plus les couleurs qui minimisent le nombre de conflits avec ses voisins.

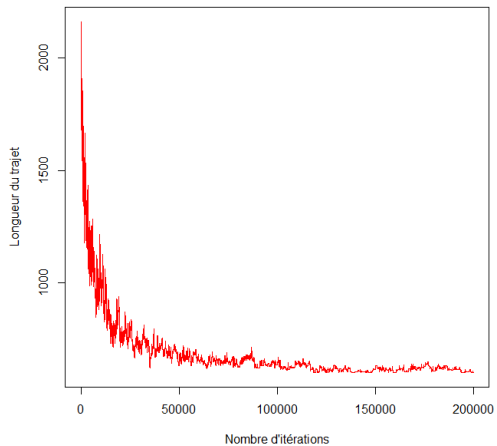
Graphique de la convergence



Pour le voyageur de commerce

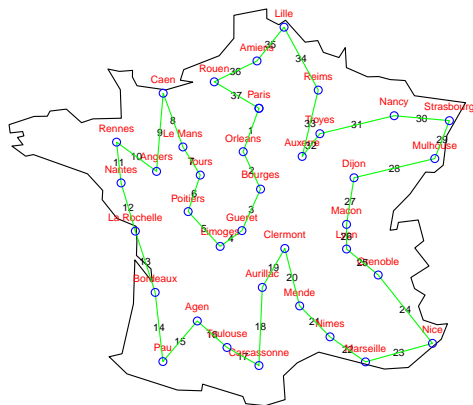
- Algorithme similaire à celui du coloriage
 - ① Point de départ : Un trajet au hasard.
 - ② Modifier au hasard ce trajet
 - ③ Calcul du nouveau trajet, 2 options :
 - ① Le trajet est plus court, on le garde.
 - ② Le trajet est plus long, on le garde avec probabilité P_i qui dépend de l'accroissement.
 - ④ Recommencer jusqu'à convergence...
- Au fur et à mesure que i croit, P_i ne gardera un trajet plus long que si l'accroissement est de moins en moins important.
- Difficulté : Bien modifier au hasard les trajets.

Evolution de l'algorithme



Le trajet optimal !

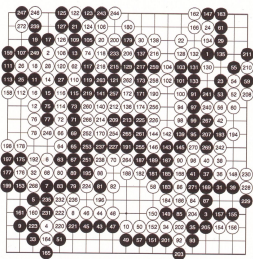
Trajet optimal



Jouons un peu...



SOCIÉTÉ DE MATHÉMATIQUES
APPLIQUÉES ET INDUSTRIELLES



N° 109 • Mars 2016

... au Japon



Quelques dates (encore !)

- 1993 : Bernd Brügmann écrit le premier programme de Go utilisant une méthode aléatoire.
- 1997 : Deep Blue bat Gary Kasparov. Au même moment, un piètre joueur de Go peut battre n'importe quel programme.
- 2007 : Les meilleurs programmes de Go utilisent des méthodes aléatoires, et rivalisent avec de bons joueurs de Club.
- Mars 2016 : AlphaGo bat Lee Sedol !

Pour en savoir plus :

- "Le joueur d'échecs" de Stefan ZWEIG.
- "Le Maître ou le tournoi de Go" de Yasunari KAWABATA.