La méthode de Monte Carlo

Thierry Jeantheau

Université Paris Est Marne–la–Vallée

15 Janvier 2014

Atelier

Loi des grands nombres

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ une suite de vecteurs aléatoires

- Indépendants,
- Même loi,
- $E(|X_1|) < \infty$.

LFGN

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\text{p.s.}} E(X_1).$$

Une première application

(U_i, V_i) couple d'uniformes indépendantes sur $[-1, 1]$.

$$X_i = \mathbb{1}_{\{U_i^2 + V_i^2 \leq 1\}}$$

Utilisation numérique de la loi des grands nombres

$$4S_n \sim \pi$$

C'est l'une des pires façons d'approximer π !

Approximer une intégrale

But : Approximer $I = \int_0^1 f(x)dx$.

1. Simuler $U_1, U_2, \ldots, U_n$, uniformes continues sur $[0,1]$
2. Poser $X_i = f(U_i)$
3. Calculer $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Problème : Calcul de l'erreur !

Théorème Central Limite

On pose

$$\sigma^2 \;=\; \mathrm{Var}\,(f\,(U_1))$$

TCL

$$\sqrt{n}\left(\frac{S_n - I}{\sigma}\right) \quad \xrightarrow{\text{Loi}} \quad \mathcal{N}(0,1).$$

A 95% (approximativement), I appartient à

$$\left[S_n - 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, S_n + 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Méthode à vitesse $\sqrt{n}$.

Généralisation

But : Approximer $I = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx$.

Soit $p(x)$ une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^d$ (non nulle).

$$I = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(x)}{p(x)}\, p(x)\, dx.$$

Estimateur : $\quad S_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{f(U_i)}{p(U_i)},$

où les U_i sont simulés suivant la loi de densité p. On a

$$I \in \left[S_n - 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, S_n + 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right], \quad \text{avec} \quad \sigma^2 = \mathrm{var}\left(\frac{f(U_1)}{p(U_1)} \right)$$

Cette intervalle ne dépend pas de la dimension d du problème !

"Importance sampling"

Un résultat théorique :

Variance minimale

Obtenue avec $p^*(x) \; = \; \dfrac{|f(x)|}{\int_S |f(x)|\, dx}$.

Idée : Utiliser p qui ressemble le plus possible à f.

Contrainte : Savoir simuler la loi p !

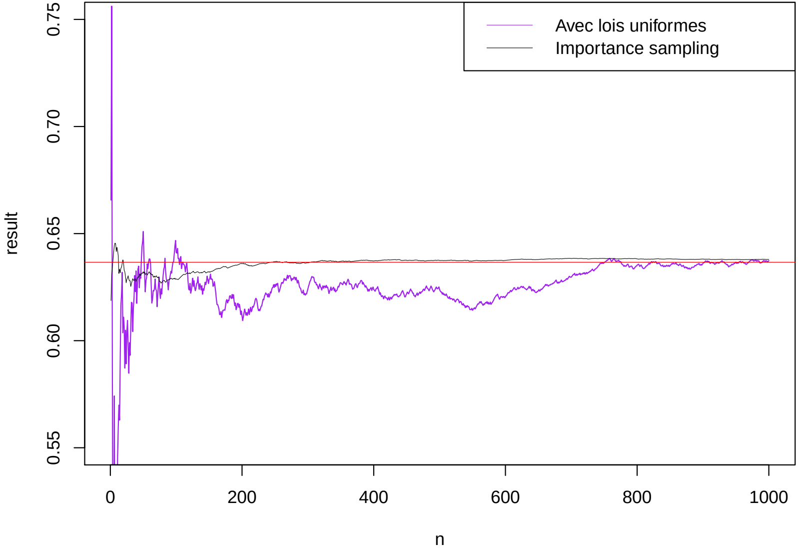
Un exemple

$$I = \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\, t\right) dt.$$

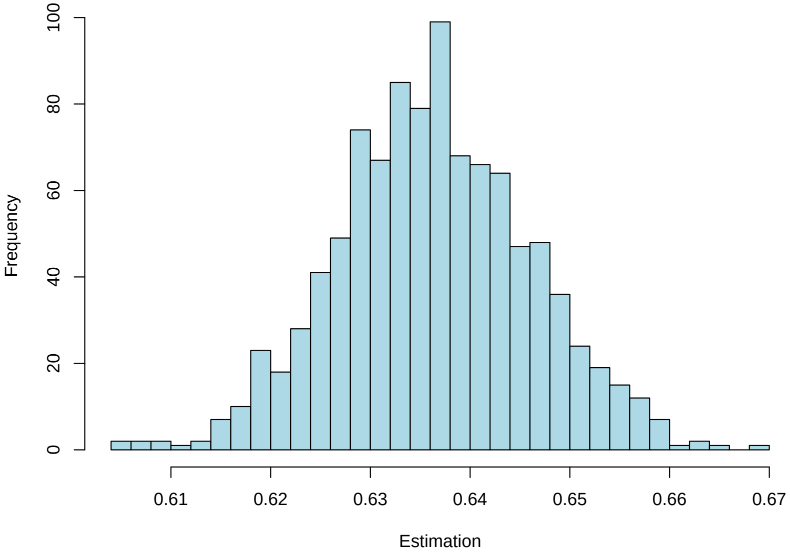
- Méthode naïve : Loi uniforme (dispersion σ)
- Importance sampling : Plusieurs densités possibles

1. Avec $p_1(x) = 2(1-x)$, dispersion $\sigma_1 \simeq \sigma/4$.
2. Avec $p_2(x) = \frac{3}{2}(1-x^2)$, dispersion $\sigma_2 \simeq \sigma/10$.

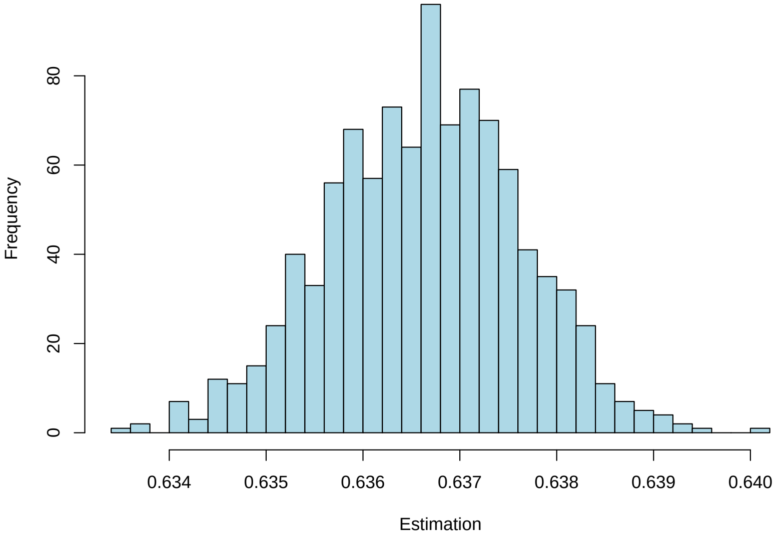
Graphique de convergence



Histogramme de la méthode "classique"



Histogramme de la méthode avec la densité p_2



Variables antithétiques

$T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonction (décroissante).

Définition : X et $T(X)$ sont antithétiques si elles ont la même loi.

Exemples :
• Si U suit la loi $\mathcal{U}_{[0,1]}$, U et $1 - U$ sont "antithétiques".
• Si X suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$, X et $-X$ sont "antithétiques".

Idée : Remplacer $f(U_1) + f(U_2)$ par $f(U_1) + f(T(U_1))$.

Gain : Si Covariance$(f(U_1), f(T(U_1))) < 0$ (vrai si f monotone).

Sur l'exemple, on divise ainsi l'écart-type par environ 3.5.

Convergence de la méthode "antithétique"