

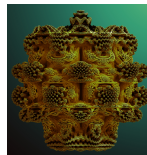
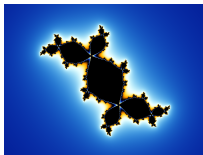
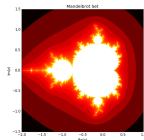
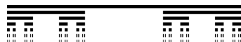
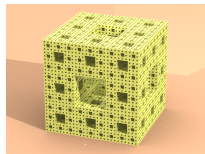
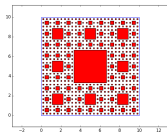
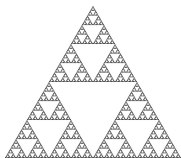
Les Systèmes de Fonctions Itérées

Olivier Sester

Université Paris Est-Marne la Vallée

17 janvier 2017

Présentation



- ① Ensembles Fractals
- ② Là où vivent les Fractals
- ③ Systèmes de Fonctions Itérées
- ④ Dimension Fractale
- ⑤ Programmation

Le concept a été introduit et popularisé dans les années 70, par [Benoit Mandelbrot](#). Même s'il n'y a pas de définition universelle, on peut dire qu'il s'agit d'ensembles (compacts) de \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 ... présentant une certaine auto-similarité : un même motif se répète à des échelles différentes et ceci une infinité de fois.

Ces ensembles étaient apparus dès la fin du XIX, mais c'est l'introduction des outils informatiques et l'arrivée des premières images numériques qui a relancé la théorie mathématique de ces objets.

Le lien [Mathématique-Informatique](#) fonctionne dans les 2 sens :

- Les questions mathématiques donnent lieu à des algorithmes informatiques ;
- Inversement les nouvelles images ont permis de formuler des conjectures et parfois de les résoudre.

Les Ensembles Fractals sont des objets mathématiques abstraits mais, en fait, ils ont des applications pratiques dans de très nombreux domaines des sciences.

- 1 **Biologie** : des structures des plantes, bactéries, feuilles, branches d'arbres



- 2 **Médecine** : structure des poumons, intestins,..

- 3 **Physique** : Mouvement brownien

- 4 **Sciences de l'ingénieur** : antennes pour les téléphones portables :



On va se limiter dans cet atelier aux fractales du plan obtenues par des **Systèmes de Fonctions Itérées** (IFS en anglais!).

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, une fonction continue. Un sous-ensemble A de \mathbb{R}^2 est dit invariant si $f(A) = A$.

Un Ensemble Fractal sera donc une partie compacte de \mathbb{R}^2 (i.e. fermée et bornée) entièrement déterminée par la donnée d'une ou plusieurs fonctions f .

On note $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ l'ensembles des parties compactes de \mathbb{R}^2 .

\mathbb{R}^2 est muni de la distance euclidienne, si $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ sont deux points de \mathbb{R}^2

$$d(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

$\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ est également muni d'une distance d_H : c'est la **distance de Hausdorff** entre deux parties (compactes) de \mathbb{R}^2 .

Si $A, B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$, on commence par considérer pour un $x \in A$ fixé :

$$d(x, B) = \min\{|x - y|; y \in B\},$$

ce qui nous permet de noter $\Delta(A, B) = \max\{d(x, B) : x \in A\}$. Enfin la distance de A à B :

$$d_H(A, B) = \max\{\Delta(A, B), \Delta(B, A)\}$$

Théorème (point fixe)

Si $F : E \rightarrow E$ est une application contractante alors F admet un unique point fixe $\ell \in E : F(\ell) = \ell$.

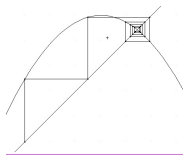
De plus, les suites récurrentes associées à F

$$u_{n+1} = F(u_n)$$

converge géométriquement vers ℓ , pour toute donnée initiale $u_0 \in E$.

Dans cet énoncé l'espace E doit être muni d'une distance d :

- **contractant** : il existe $0 \leq k < 1$ tel que $d(F(x), F(y)) \leq kd(x, y)$
- E doit avoir la propriété d'être **complet** pour la distance.



Proposition : L'espace $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ muni de d_H est un espace complet.

L'idée principale des IFS est d'appliquer le théorème du point fixe dans l'espace $(\mathcal{H}(\mathbb{R}^2), d_H)$ pour des applications bien choisies.

Théorème

Une transformation du plan est une similitude directe si son écriture complexe est de la forme $f(z) = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^$ et $b \in \mathbb{C}$ fixés.*

Si l'on identifie \mathbb{C} et \mathbb{R}^2 , on peut écrire

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} r \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ r \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Notons $a = re^{i\theta}$, $f(z) = az + b$ est une similitude contractante si et seulement si $r < 1$. En effet, en complexe :

$$|f(z_1) - f(z_2)| = |re^{i\theta}||z_1 - z_2| = r|z_1 - z_2|$$

Cela revient à dire que le déterminant de la matrice A est < 1 .

On va considérer N similitudes $w_1, \dots, w_N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ chacune étant supposées contractantes d'un facteur λ_i mais bien souvent tous les λ_i seront en fait égaux entre eux.

On peut alors définir une application :

$$W : \mathcal{H}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$$
$$W(A) = \bigcup_{i=1}^N w_i(A).$$

W est une application **contractante** de $(\mathcal{H}(\mathbb{R}^2), d_H)$ c'est à dire

$$d_H(W(A), W(B)) \leq \lambda d_H(A, B)$$

où $\lambda = \max(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$

Le Théorème du point fixe s'applique donc à W sur l'ensemble $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$.
Par conséquent, il existe un unique compact K de \mathbb{R}^2 tel que $W(K) = K$.
De plus, pour toute donnée initiale $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$, la suite récurrente

$$W^n(A) \longrightarrow K \text{ quand } n \rightarrow +\infty$$

K est appelé **l'attracteur** de l'IFS.

Le fait que pour chaque similitude $w_i(K) \subset K$ et va donner lieu à l'autosimilarité de l'attracteur K .

Si l'on choisit

$$w_1(z) = \frac{1}{2}z, \quad w_2(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}, \quad w_3(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$$

On obtient comme point fixe le triangle de Sierpinsky :

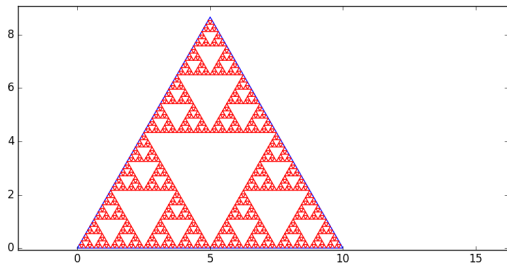


Figure 1 – Le triangle de Sierpinsky

Si l'on choisit

$$w_1(z) = \frac{1}{3}z, \quad w_2(z) = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}$$
$$w_3(z) = \frac{1}{3}e^{i\pi/3}z + \frac{1}{3}, \quad w_4(z) = \frac{1}{3}e^{2i\pi/3}z + \frac{2}{3}$$

On obtient comme point fixe la courbe de Von Koch :

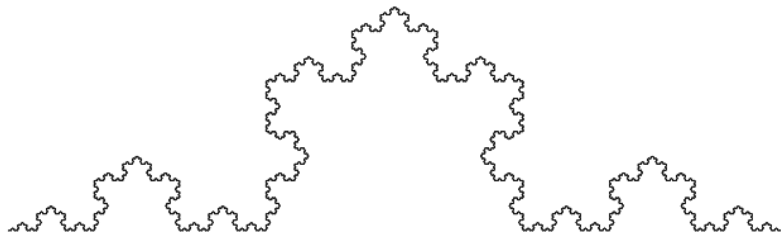


Figure 2 – Courbe de Von Koch

Si l'on choisit 4 contractions w_i , $i = 1, 2, 3, 4$ associées aux matrices A_i et au vecteur V_i où

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,16 \end{pmatrix} \quad V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,04 \\ -0,04 & 0,85 \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,6 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,26 \\ 0,23 & 0,22 \end{pmatrix} \quad V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,6 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} -0,15 & 0,28 \\ 0,26 & 0,24 \end{pmatrix} \quad V_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,44 \end{pmatrix}$$

On obtient comme attracteur un ensemble qui ressemble à :



Figure 3 – La fougère de Barnsley

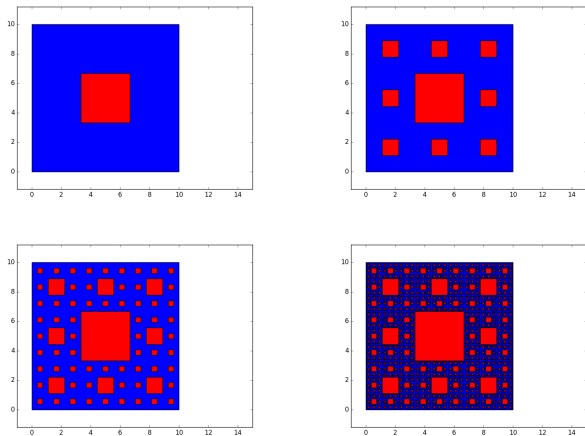


Figure 4 – Le tapis de Sierpinsky

Idée intuitive

- ① Un segment de dimension 1
- ② Un carré est de dimension 2
- ③ Un cube est de dimension 3
- ④ Les ensembles fractals seront de dimension non entière.

Définition : Si $K \subset \mathbb{R}^2$ on note $N(\frac{1}{2^n})$ le nombre (minimal) de carrés de coté $\frac{1}{2^n}$ nécessaires pour recouvrir K .

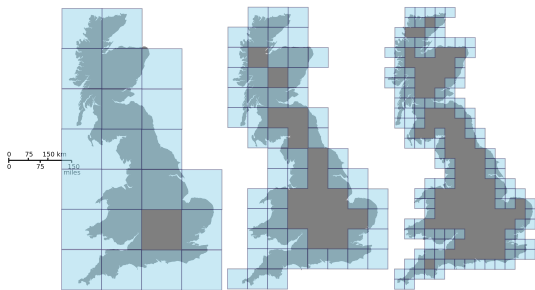


Figure 5 – Source Wikipedia

La dimension de boîte, (ou de Hausdorff, ou fractale) de K est

$$\dim_H(K) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(N(\frac{1}{2^n}))}{\ln(2^n)}.$$

Pour les ensembles Fractals obtenus par IFS, le calcul de la dimension s'avère assez simple.

Si K est obtenu par N similitudes w_1, w_2, \dots, w_N de rapport respectif λ_i , la dimension de Hausdorff de K est l'unique réel d tel que

$$\lambda_1^d + \lambda_2^d + \dots + \lambda_N^d = 1.$$

Le cas important où tous les λ_i sont égaux à λ conduit à

$$N \cdot \lambda^d = 1.$$

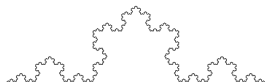
et par conséquent :

$$\dim_H(K) = \frac{\ln(N)}{-\ln(\lambda)}$$

- Triangle de Sierpinsky a pour dimension de Hausdorff : $\frac{\ln(3)}{\ln(2)}$:



- La courbe de Von Koch a pour dimension : $\frac{2 \ln(2)}{\ln(3)}$



- Le tapis a pour dimension : $\frac{3 \ln(2)}{\ln(3)}$



La construction de l'attracteur K fournit un algorithme très simple pour dessiner K . En effet, comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} W^n(A) = K \text{ pour tout } A \subset \mathbb{R}^2$$

Il suffit par exemple de prendre A un point et d'afficher tous les $W^n(A)$ pour n assez grand. Si on peut s'assurer que A est en fait déjà un sous-ensemble de K alors il suffit d'afficher la suite $W^n(A)$ pour tout n .

Si notre IFS est donné par 3 similitudes contractantes w_1, w_2, w_3 :

$$W(A) = w_1(A) \cup w_2(A) \cup w_3(A)$$

$$\begin{aligned} W^2(A) = & w_1 w_1(A) \cup w_1 w_2(A) \cup w_1 w_3(A) \\ & \cup w_2 w_1(A) \cup w_2 w_2(A) \cup w_2 w_3(A) \\ & \cup w_3 w_1(A) \cup w_3 w_2(A) \cup w_3 w_3(A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W^3(A) = & w_1 w_1 w_1(A) \cup w_1 w_1 w_2(A) \cup w_1 w_1 w_3(A) \\ & \dots \cup w_3 w_3 w_1(A) \cup w_3 w_3 w_2(A) \cup w_3 w_3 w_3(A). \end{aligned}$$

$$W^n(A) = \bigcup_{\{i_1; i_2; \dots; i_n\} \in \{1; 2; 3\}^n} w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_n}(A)$$

En pratique, on se donne un point ou un ensemble de départ et on affiche pour un certain n , toutes les images $w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_n}(A)$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} W^n(A) = K.$$

Exemple en Python...

```

1 from math import *
  import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt

5 def triangle (T, pos):
    x = np.array ([pos [0], pos[0]+T, pos[0]+T*cos(pi/3), pos [0]])
7    y = np.array ([pos [1], pos [1], pos[1]-T*sin(pi/3), pos [1]])
    plt . plot(x, y, color = red )

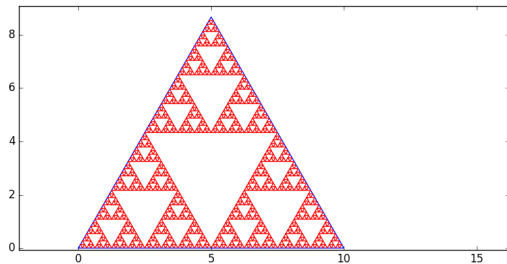
9
def f1(x,y):
11     return (1/2*x, 1/2*y)
def f2(x,y):
13     return (1/2*x+ tailleinitiale /2, 1/2*y)
def f3(x,y):
15     return (1/2*x+( tailleinitiale /2)*cos(pi/3), 1/2*y+( tailleinitiale

```

```

1 def iteration (i, T, pos):
    if (i>6):
3         return ()
    else :
5         triangle (T, pos)
            iteration (i+1, T/2, f1(pos [0], pos [1]))
7             iteration (i+1, T/2, f2(pos [0], pos [1]))
                iteration (i+1, T/2, f3(pos [0], pos [1]))
9
    tailleinitiale =100;
11 T= tailleinitiale ;
    iteration (1, T/2, [(T/2)*cos(pi/3),(T/2)*sin(pi /3)])
13 plt .show()

```



Une autre possibilité, qui fonctionne, consiste non pas à calculer toutes les compositions $w_n = w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_n}(A)$ mais de construire aléatoirement une suite w_n

- Initialisation : $A = \{x_0\}$, $w = w_1$.
- Tant que $n \leq \text{MaxIter}$
- tirer au hasard l'indice $i_k \in \{1, 2, 3\}$
- remplacer A par $w_{i_k} w(A)$
- afficher A .

On peut choisir les i_k avec equi-probabilité dans $\{1, 2, 3\}$ ou avec des probabilités p_1, p_2, p_3 bien choisies.

Fougère aléatoire

